$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

(1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

次の 2 つの条件(a), (b)を同時に満たす複素数 z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(a)　$2z,\ \dfrac{2}{z}$ の実部はいずれも整数である。

(b)　$|z| \geqq 1$ である。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

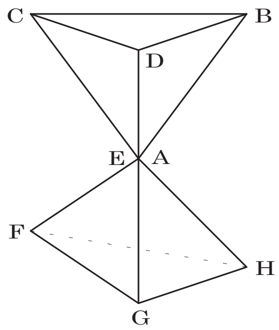
c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

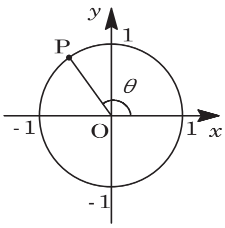
(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



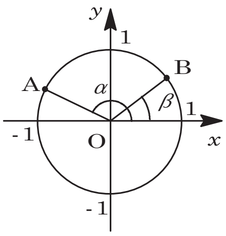
1　問題のページへ

(1)　単位円周上の点を$P(x,\ y)$とし，動径 OP に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をθとする。



このとき，$x=\cos\theta,\ \ y=\sin\theta$

(2)　単位円周上の 2 点 A, B について, OA, OB に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をそれぞれ$\alpha,\ \beta$とすると，$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$となる。



$OA=OB=1$より$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

$$\begin{aligned}AB^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

このとき, 2 点 A, B を O を中心として時計まわりにβだけ回転すると，点 A は点$A'\big(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta)\big)$，点 B は点$B'(1,\ 0)$にうつる。

$$\begin{aligned}A'B'^2&=\left\{\cos(\alpha-\beta)-1\right\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$AB=A'B'$より，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$………①

①においてβを$-\beta$に置き換えると

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$………②

さて，単位円周上の点を$Q(x',\ y')$とし，動径 OQ に対してx軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x'=\cos(-\theta),\ \ y'=\sin(-\theta)$

ここで，点 Q は(1)の点 P とx軸対称となるので，$x'=x,\ \ y'=-y$

よって，$\cos(-\theta)=\cos\theta,\ \ \sin(-\theta)=-\sin\theta$となり，②より，

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

①においてαを$90°-\alpha$に置き換えると

$\cos\big(90°-(\alpha+\beta)\big)=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta$………③

さらに，単位円周上の点を$R(x'',\ y'')$とし，動径 OR に対してy軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x''=\cos(90°-\theta),\ \ y''=\sin(90°-\theta)$

点 R は(1)の点 P と直線$y=x$について対称となるので，$x''=y,\ \ y''=x$

よって，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta,\ \ \sin(90°-\theta)=\cos\theta$となり，③より，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

［解 説］

この問題で，三角関数の公式の証明が 30 年前に京大で出たのを思い出しました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$z=x+yi$ とおくと，$2z=2x+2yi$，$\dfrac{2}{z}=\dfrac{2\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{2x-2yi}{x^2+y^2}$

条件(a)より $2x$ と $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ はともに整数であり，条件(b)より $x^2+y^2 \geqq 1$ ………①

まず $2x$ が整数より，n を整数として，$x=\dfrac{n}{2}$ ……②と表される。次に $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ が整数ということを考え, x の値が 0 か 0 でないかで場合分けをする。

(i)　$x=0$ のとき　条件(a)は満たし，条件(b)より $y^2 \geqq 1$，よって，$y \leqq -1$，$1 \leqq y$

(ii)　$x \neq 0$ のとき　$\dfrac{2x}{x^2+y^2}$ が整数より，$2|x|=|2x| \geqq |x^2+y^2|$ が必要である。

また，$|x^2+y^2| \geqq |x^2|=|x|^2$ と合わせて，$2|x| \geqq |x|^2$ となるので，$|x| \leqq 2$

②より，$x=\pm 2$，$\pm\dfrac{3}{2}$，± 1，$\pm\dfrac{1}{2}$

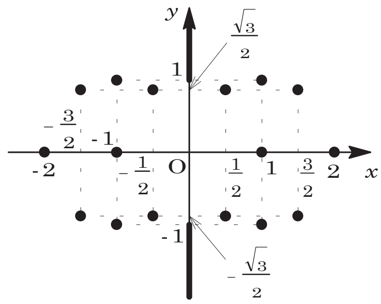
$x=\pm 2$ のとき，①は成立するので条件(b)は満たされる。また $\dfrac{\pm 4}{4+y^2}$ が整数より，$4+y^2$ が 4 以上の 4 の約数となるので，$4+y^2=4$ から $y=0$

$x=\pm\dfrac{3}{2}$ のとき，①は成立するので条件(b)は満たされる。また $\dfrac{\pm 3}{\dfrac{9}{4}+y^2}$ が整数より，$\dfrac{9}{4}+y^2$ が $\dfrac{9}{4}$ 以上の 3 の約数となるので，$\dfrac{9}{4}+y^2=3$ から $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\pm 1$ のとき，①は成立するので条件(b)は満たされる。また $\dfrac{\pm 2}{1+y^2}$ が整数より，$1+y^2$ が 1 以上の 2 の約数となるので，$1+y^2=1$，2 から $y=0$，± 1

$x=\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，①より $\dfrac{1}{4}+y^2 \geqq 1$ なので $y \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y$ となる。また $\dfrac{\pm 1}{\dfrac{1}{4}+y^2}$ が整数より，$\dfrac{1}{4}+y^2=1$ から $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(i)(ii)より，複素数 z 全体の集合を複素数平面上に図示すると右図のようになる。

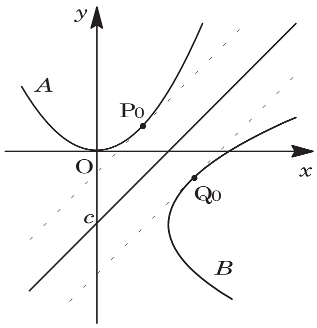


［解 説］

初めは $x^2+y^2=1$ のときと $x^2+y^2>1$ のときに場合分けをしたのですが，泥沼に入り沈没してしまいました。そこで条件のきつい x の値の範囲を絞り込むという方針に転換して考えたのが上に書いた解です。

3

問題のページへ



放物線Aと,Aと線対称な放物線Bに，対称軸$y=x-c$に平行な直線を引き，放物線Aとの接点をP_0，放物線Bとの接点をQ_0としたとき，線分$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$は対称軸と直交する。

すると，線分PQの長さの最小値は線分$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$の長さとなる。

ここで，放物線$A: y=x^2$……①と対称軸に平行な直線$y=x+k$……②が接するとき，①②より，

$$x^2-x-k=0\cdots\cdots\cdots③$$

判別式$D=1+4k=0$より，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，接点は③から$x=\dfrac{1}{2}$，①から$y=\dfrac{1}{4}$

よって，$\mathrm{P}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

点P_0と点Q_0は対称軸$y=x-c$に関して対称なので，線分 PQ の長さの最小値$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$は点$\mathrm{P}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$と対称軸$x-y-c=0$との距離の2倍となるので，

$$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0=2\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

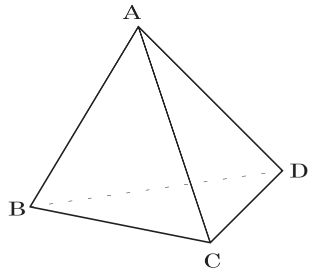
［解 説］

第1問は三角関数の加法定理の証明でしたので丁寧に解を書きましたが，本問は求値問題ですので，直観に依存した解にしました。

4

問題のページへ

(1) 辺 AB が電流を通すかどうかで場合分けをする。



(i)　辺 AB が電流を通すとき

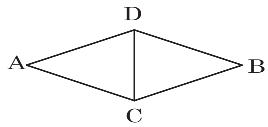
点 A から B に電流が流れる確率は$\dfrac{1}{2}$である。

(ii) 辺 AB が電流を通さないとき

点 A から B に電流が流れない確率は$\dfrac{1}{2}$である。

(ii-i)　辺 CD が電流を通さないとき

辺 CD が電流を通さない確率は$\dfrac{1}{2}$で，そのとき



点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD と DB がともに電流を通すか，または辺 AC と CB がともに電流を通す場合である。その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=\frac{7}{32}$$

(ii-ii) 辺 CD が電流を通すとき

辺 CD が電流を通す確率は$\dfrac{1}{2}$で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD, AC の少なくとも一方が電流を通し，しかも辺 DB, CB の少なくとも一方が電流を通す場合である。その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\left[\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]=\frac{9}{32}$$

(ii-i)(ii-ii)より，点 A から B に電流が流れる確率は，$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{7}{32}+\dfrac{9}{32}\right)=\dfrac{1}{4}$

(i)(ii)より，求める点 A から B に電流が流れる確率は$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$である。

(2) (1)より点 B から A に電流が流れる確率は$\dfrac{3}{4}$で，同様に考えると，点 E から F に電流が流れる確率も$\dfrac{3}{4}$となる。

よって，点 B から F に電流が流れる確率は$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$となる。

［解 説］

点 A から B に電流が流れる確率を求めようか，それとも流れない確率を求めようかと迷ってしまいました。結局，前者の方で解を考えましたが，辺 AB の状態，さらに辺 CD の状態で場合分けが必要でした。