**1**

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

$$a^3+b^3,\ \ a^2b+b^2a$$

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ \ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ \ 3(a^3+b^3+c^3),\ 9abc$$

(3)　$x,\ y,\ z$ を正の実数とするとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

座標空間において，8 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{F}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{G}(1,\ 1,\ 1)$ をとり，この 8 点を頂点とする立方体を $Q$ とする。また点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と正の実数 $t$ に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積，すなわち 5 個の領域 $Q$，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$ の共通部分の体積を $t$ で表せ。

(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積を求めよ。

(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を $t$ で表せ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

$xy$ 平面において，次の円 $C$ と楕円 $E$ を考える。

$$C : x^2 + y^2 = 1,\quad E : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

また，$C$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における $C$ の接線を $l$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$l$ の方程式を $s, t$ を用いて表せ。

以下，$t>0$ とし，$E$ が $l$ から切り取る線分の長さを $L$ とする。

(2)　$L$ を $t$ を用いて表せ。

(3)　P が動くとき，$L$ の最大値を求めよ。

(4)　$L$ が(3)で求めた最大値をとるとき，$l$ と $E$ が囲む領域のうち，原点を含まない領域の面積を $A$ とする。$A$ の値を求めよ。

**1**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$a^3+b^3-(a^2b+b^2a)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)=(a+b)(a-b)^2$

$a>0,\ b>0,\ a\neq b$ より，$(a+b)(a-b)^2>0$ となり，$a^3+b^3>a^2b+b^2a$

(2)　まず，$3(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$=2a^3+2b^3+2c^3-(b^2a+c^2a+a^2b+c^2b+a^2c+b^2c)$

$=(a^3+b^3-a^2b-b^2a)+(b^3+c^3-b^2c-c^2b)+(c^3+a^3-c^2a-a^2c)$

(1)より，$a^3+b^3>a^2b+b^2a$

同様にして，$b^3+c^3>b^2c+c^2b$，$c^3+a^3>c^2a+a^2c$

そこで,$(a^3+b^3-a^2b-b^2a)+(b^3+c^3-b^2c-c^2b)+(c^3+a^3-c^2a-a^2c)>0$ より，

$3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ ………①

次に，$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$

よって，$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ………②

また，$(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc$

$=a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)$

$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0$

よって，$(a+b+c)(ab+bc+ca)>9abc$ ………③

①②③より，

$9abc<(a+b+c)(ab+bc+ca)<(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)<3(a^3+b^3+c^3)$

(3)　相加平均と相乗平均の関係より，

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=6$$

等号は$\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{z}$，$\dfrac{x}{z}=\dfrac{z}{x}$，すなわち$x=y=z$のときに成立する。

また，$y=z=1$のとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{2}{x}+1+x+x+1=2x+\dfrac{2}{x}+2$ となり，

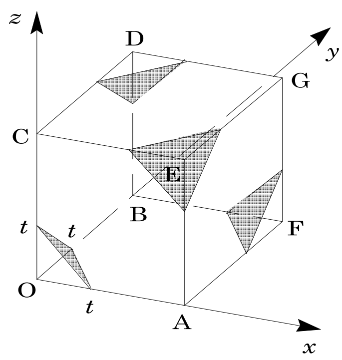
$x\to\infty$のとき，$2x+\dfrac{2}{x}+2\to\infty$より，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\geqq 6$である。

［解 説］

(3)は，流れを無視して証明しています。式を通分すると，(2)の利用が可能です。なお, (2)では最初に具体的数値を代入して，大小関係の見当をつけています。

**2**

問題のページへ

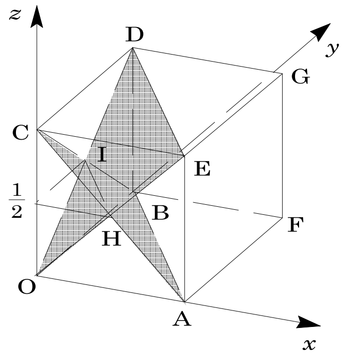



(1)　まず，$0<t\leqq 1$ のとき，4 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$ には共通部分がない。

また，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}t^2\cdot t=\dfrac{1}{6}t^3$ となり，同様に，他の 3 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$ の体積も $\dfrac{1}{6}t^3$ である。

$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積は，

$$1^3-4\times\frac{1}{6}t^3=1-\frac{2}{3}t^3$$




(2)　まず，$t=1$ のとき，3 個の領域 $Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$ には共通部分がない。

さて，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$ の共通部分は，四面体 COHI であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{24}$$

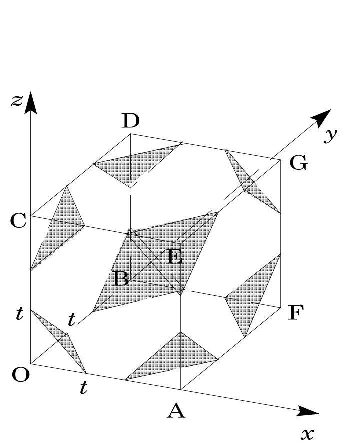
同様にして，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$ の共通部分の体積，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$ の共通部分の体積は，それぞれ $\dfrac{1}{24}$ である。

また，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 1=\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積は，

$$\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$$

(3)　(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき




8 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{G})$ には共通部分がない。

(1)と同様に考えて，求める領域の体積は，

$$1-\frac{1}{6}t^3\times 8=1-\frac{4}{3}t^3$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき

(2)と同様に考えて，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$ の共通部分は四面体であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

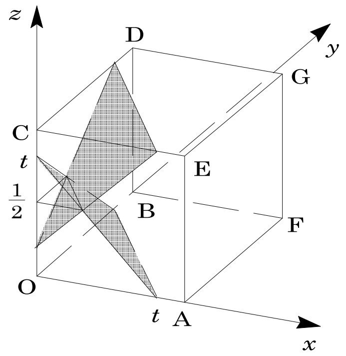
他の共通部分についても同様であり，この四面体は，立方体の辺の数と等しく 12 個できる。

よって，求める領域の体積は,

$$1-\left\{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\times 12\right\}$$

$$=1-\frac{4}{3}t^3+4\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{8}{3}t^3-6t^2+3t+\frac{1}{2}$$

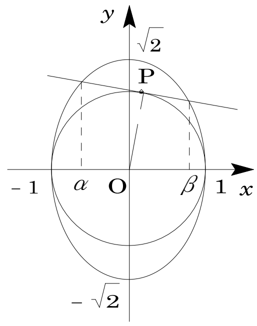



［解 説］

題意を読み取る読解力と空間図形に対する直観力が要求されます。また，答案をまとめる記述力も必要です。

**3**

問題のページへ




(1) 接線 $l$ の法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ より,

$$s(x-s)+t(y-t)=0,\quad sx+ty=s^2+t^2$$

すると, $s^2+t^2=1$ より, $l: sx+ty=1$ ………①

(2) ①より, $y=\dfrac{1}{t}(1-sx)$ であり, $E: 2x^2+y^2=2$ に代入すると, $2x^2+\dfrac{1}{t^2}(1-sx)^2=2$ となり,

$$(2t^2+s^2)x^2-2sx+1-2t^2=0 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解は, $s^2=1-t^2$ に注意すると,

$$x=\frac{s\pm\sqrt{s^2-(2t^2+s^2)(1-2t^2)}}{2t^2+s^2}=\frac{s\pm\sqrt{(1-t^2)-(t^2+1)(1-2t^2)}}{t^2+1}$$

$$=\frac{s\pm\sqrt{2t^4}}{t^2+1}=\frac{s\pm\sqrt{2}t^2}{t^2+1}$$

この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと, $\beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}t^2}{t^2+1}$

ここで, $E$ が $l$ から切り取る線分の長さ $L$ は,

$$L^2=(\beta-\alpha)^2+\left(-\frac{s}{t}\right)^2(\beta-\alpha)^2=\frac{t^2+s^2}{t^2}(\beta-\alpha)^2=\frac{1}{t^2}(\beta-\alpha)^2$$

よって, $L=\dfrac{1}{t}(\beta-\alpha)=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}$

(3) (2)より, 相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$L=\frac{2\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}}\leqq\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

等号は $t=\dfrac{1}{t}$ すなわち $t=1$ のときに成立するので, $L$ の最大値は $\sqrt{2}$ である。

(4) $t=1$ のとき $l: y=1$ となり, $E: x=\pm\sqrt{1-\dfrac{y^2}{2}}$ であるので, $u=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$ とおくと,

$$A=2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{2}}\,dy=2\sqrt{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\pi-2)$$

［解 説］

楕円と直線に関する標準的な問題です。なお, (3)では, 円の面積を利用して積分値を求めていますが, $y$ 軸方向に縮小して楕円を円に変換することと同じです。