1

解答解説のページへ

ある硬貨を投げたとき，表と裏がそれぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い，3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し，操作がちょうど n 回目で終了となる確率を P_n，操作が n 回以上繰り返される確率を Q_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　P_3，P_4，P_5，P_6，P_7 をそれぞれ求めよ。

(2)　Q_6，Q_7 をそれぞれ求めよ。

(3)　$n \geqq 5$ のとき，$Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。

(4)　$n \geqq 4$ のとき，$Q_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

座標平面において，原点を O とし，次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a)　点 P は x 軸上にあり，その x 座標は正である。

(b)　点 Q は第 1 象限にあって，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ を満たす。

(c)　点 R は第 1 象限にあって，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ を満たし，かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす 2 点 Q，R が存在するような，点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点 P が動くとき，線分 QR が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分 OP の中点を M とする。(1)の範囲を点 P が動くとき，四角形 MPRQ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

自然数 n に対し,

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\ ,\ \ T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の不等式を示せ。　$\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \right| \leqq \frac{1}{n+1}$

(2)　$T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件より，硬貨を投げ，3 回続けて表が出たときにこの操作は終了する。また，n 回目で終了となる確率を P_n とする。

ここで，表を○，裏を×，表裏が任意を△で表し，1 回目からの出方を記すと，

(i) 操作が 3 回で終了　○○○の場合より，$P_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ii) 操作が 4 回で終了　×○○○の場合より，$P_4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$

(iii) 操作が 5 回で終了　△×○○○の場合より，$P_5=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$

(iv) 操作が 6 回で終了　△△×○○○の場合より，$P_6=1^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$

さらに，操作が繰り返される出方を＊で表すと，

(v) 操作が 7 回で終了　＊＊＊×○○○の場合より，

$$P_7=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{128}$$

(2) Q_n は操作が n 回以上繰り返される確率より，

$$Q_6=1-(P_3+P_4+P_5)=\frac{3}{4}$$

$$Q_7=1-(P_3+P_4+P_5+P_6)=\frac{11}{16}$$

(3) $n\geqq5$ のとき，(2)と同様に考えて，$Q_n=1-(P_3+P_4+\cdots+P_{n-1})$ から，

$$Q_n-Q_{n-1}=1-(P_3+P_4+\cdots+P_{n-1})-1+(P_3+P_4+\cdots+P_{n-2})=-P_{n-1}$$

さて，操作が $n-1$ 回で終了するのは，＊＊…＊×○○○の場合より，

$$P_{n-1}=Q_{n-4}\times\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}Q_{n-4}$$

したがって，$Q_n-Q_{n-1}=-\frac{1}{16}Q_{n-4}$ ………①

(4) ①より，$n\geqq8$ のとき，$Q_n-Q_{n-4}=-\frac{1}{16}(Q_{n-4}+Q_{n-5}+Q_{n-6}+Q_{n-7})$

ここで，①より $Q_n-Q_{n-1}\leqq0$ となり，数列 $\{Q_n\}$ は単調に減少する数列なので，$Q_{n-7}\geqq Q_{n-6}\geqq Q_{n-5}\geqq Q_{n-4}$ から，

$$Q_n\leqq Q_{n-4}-\frac{1}{16}(Q_{n-4}+Q_{n-4}+Q_{n-4}+Q_{n-4})=\frac{3}{4}Q_{n-4}\ \cdots\cdots\cdots②$$

以下，$n\geqq4$ のとき，$Q_n<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ の成立を数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=4,\ 5,\ 6,\ 7$ のとき

$Q_4=1-P_3=\frac{7}{8}$，$Q_5=1-(P_3+P_4)=\frac{13}{16}$，$Q_6=\frac{3}{4}$，$Q_7=\frac{11}{16}$ から，

$$Q_4=\sqrt{\frac{49}{64}}<\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}},\ Q_5<\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\ Q_6<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}},\ Q_7<\frac{3}{4}$$

© 電送数学舎 2011

これより，$n=4$，5，6，7のとき，成立している。

(ii)　$n=k \geqq 4$ のとき

$Q_k < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-3}{4}}$ と仮定すると，②より，$Q_{k+4} \leqq \frac{3}{4}Q_k < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k+4-3}{4}}$

よって，$n=k+4$ のときも成立している。

(i)(ii)より, $n \geqq 4$ のとき，$Q_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つ。

［解 説］

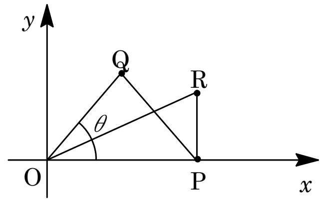
設問(3)までは順調でしたが, (4)の解答例を作るのにはずいぶん時間がかかりました。アバウトに評価するとうまくいかず，結論をみて，$\frac{3}{4}$ が現れるように式変形を行いました。

© 電送数学舎 2011

2

問題のページへ

(1)　条件(a), (b)より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$としてOQ＝QP＝1から，



$$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{P}(2\cos\theta,\ 0)$$

また，条件(c)より，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ t)$とおく。

すると，OR＋RP＝2から，$\sqrt{4\cos^2\theta+t^2}+t=2$，

$$4\cos^2\theta+t^2=(2-t)^2,\ t=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

よって，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$となる。

以上より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$から，点 P の x 座標が取りうる値の範囲は，$0<x<2$である。

(2)　まず，点$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$は，第 1 象限内で円弧$x^2+y^2=1$……①上を動く。

また，点$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$に対して，$x=2\cos\theta$，$y=\sin^2\theta$とおくと，

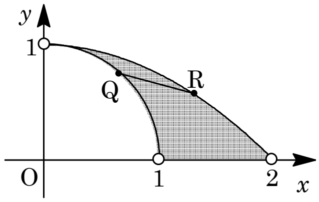
$$y=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}x^2+1\cdots\cdots\cdots②$$

すると，点 R は第 1 象限内の放物線②上を動く。しかも，円①は放物線②の下側にある。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{QO}}=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\cos\theta,\ \sin^2\theta-\sin\theta)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\cos^2\theta-\sin^3\theta+\sin^2\theta=-\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1$$
$$=-(\sin\theta-1)(\sin^2\theta-\sin\theta-1)<0$$

これより，$\angle\mathrm{OQR}>\dfrac{\pi}{2}$となり，線分 QR は円①と点 Q 以外の共有点をもたない。

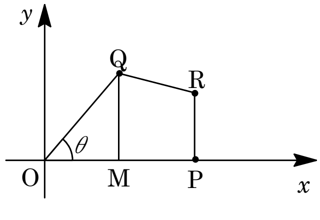


したがって，線分 PQ の通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は座標軸のみ含まない。

また，この領域の面積は，

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx-\frac{\pi}{4}=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_0^2-\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}$$

(3)　OP の中点 M は$\mathrm{M}(\cos\theta,\ 0)$と表されるので，線分 QM は x 軸に垂直となる。すなわち，四角形 MPRQ は台形となる。



そこで，四角形 MPRQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)$$

$$S'=-\frac{1}{2}\sin\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta(\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(\sin^2\theta+\sin^3\theta)+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)(1+2\sin\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(3\sin^3\theta+2\sin^2\theta-2\sin\theta-1)=-\frac{1}{2}(\sin\theta+1)(3\sin^2\theta-\sin\theta-1)$$

© 電送数学舎 2011

すると，$0<\sin\theta<1$ における $S'=0$ の解は，

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ とおくと，S の値の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，S は $\theta=\alpha$ のとき最大値をとり，このとき，点 P の x 座標は，

$$x=2\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3}$$

［解 説］

点 Q の座標を三角関数でおくと，うまくまとまりますが，初めは，そうしていなかったので，この問題も時間を費やしてしまいました。なお，(2)は感覚的な解答例ですが，正面からぶつかり，跳ね返されてしまった結果です。

© 電送数学舎 2011

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $I_n=\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|$とおくと,

$$I_n=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n-1}{1+x}dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで, $0\leqq x\leqq 1$ において, $\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ となるので,

$$I_n\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2) $S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx=\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

また, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$より,

$$T_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$$

よって, $T_n-2S_n=-1-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}=-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

(3) (1)より, $n\to\infty$ のとき, $I_n\to 0$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$$

(2)より, $T_n=2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right\}=2\log 2-1$$

［解 説］

定積分と級数について, 過去に類題がかなり出ている有名問題です。要演習の 1 題です。

© 電送数学舎 2011