1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次のように定義する。

$$a_1=5,\ b_1=3,\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，自然数nについて$c_n=a_n{}^2-b_n{}^2$とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　c_nをnを用いて表せ。

(2)　kを自然数とするとき，自然数lについて

$$a_{k+l}=a_ka_l+b_kb_l,\ b_{k+l}=b_ka_l+a_kb_l$$

が成立することを，lに関する数学的帰納法によって示せ。

(3)　$n>l$となる自然数$n,\ l$について，$b_{n+l}-c_lb_{n-l}=2a_nb_l$が成立することを示せ。

(4)　2 以上の自然数nについて，$a_{2n}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}c_{n-m}a_{2m}=\frac{b_{2n+1}}{2b_1}-\frac{c_n}{2}$が成立することを示せ。

2

解答解説のページへ

$a^2+b^2=1$を満たす正の実数 a, b の組$(a,\ b)$の全体を S とする。S に含まれる$(a,\ b)$に対し，xyz 空間内に 3 点$\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_1とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_1の体積の最大値を求めよ。

(2)　三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_2とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3)　三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_3とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_3の体積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

(3)　$b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4)　自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

$\boxed{1}$　問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=5$，$b_1=3$，$a_{n+1}=5a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+5b_n$ となり，

$$c_{n+1}={a_{n+1}}^2-{b_{n+1}}^2=(5a_n+3b_n)^2-(3a_n+5b_n)^2=16{a_n}^2-16{b_n}^2=16c_n$$

ここで，$c_1=25-9=16$ なので，$c_n=16\cdot 16^{n-1}=16^n$

(2)　自然数 $k,\ l$ に対して，$a_{k+l}=a_ka_l+b_kb_l$ ……①，$b_{k+l}=b_ka_l+a_kb_l$ ……②が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$l=1$ のとき　$a_{k+1}=5a_k+3b_k=a_ka_1+b_kb_1$，$b_{k+1}=3a_k+5b_k=b_ka_1+a_kb_1$

よって，①②は成立する。

(ii)　$l=i$ のとき　$a_{k+i}=a_ka_i+b_kb_i$，$b_{k+i}=b_ka_i+a_kb_i$ が成立すると仮定すると，

$$a_{k+i+1}=5a_{k+i}+3b_{k+i}=5(a_ka_i+b_kb_i)+3(b_ka_i+a_kb_i)$$
$$=a_k(5a_i+3b_i)+b_k(3a_i+5b_i)=a_ka_{i+1}+b_kb_{i+1}$$
$$b_{k+i+1}=3a_{k+i}+5b_{k+i}=3(a_ka_i+b_kb_i)+5(b_ka_i+a_kb_i)$$
$$=b_k(5a_i+3b_i)+a_k(3a_i+5b_i)=b_ka_{i+1}+a_kb_{i+1}$$

よって，$l=i+1$ のときも①②は成立する。

(i)(ii)より，自然数 $k,\ l$ に対して，①②は成立する。

(3)　②より，$b_{n+l}-2a_nb_l=b_na_l+a_nb_l-2a_nb_l=b_na_l-a_nb_l$ ………③

$n>l$ より，$k=n-l$ とおくと，①②より，

$$a_n=a_{n-l}a_l+b_{n-l}b_l\ \text{………④},\quad b_n=b_{n-l}a_l+a_{n-l}b_l\ \text{………⑤}$$

④⑤より，$b_na_l-a_nb_l=a_l(b_{n-l}a_l+a_{n-l}b_l)-b_l(a_{n-l}a_l+b_{n-l}b_l)=c_lb_{n-l}$ ………⑥

③⑥より，$b_{n+l}-2a_nb_l=c_lb_{n-l}$，すなわち $b_{n+l}-c_lb_{n-l}=2a_nb_l$ ………⑦

(4)　⑦において，$l=1$，$n=2m$ とおくと，$2b_1a_{2m}=b_{2m+1}-c_1b_{2m-1}$ となり，(1)から，

$$2b_1c_{n-m}a_{2m}=c_{n-m}b_{2m+1}-c_{n-m}c_1b_{2m-1}=c_{n-m}b_{2m+1}-c_{n-m+1}b_{2m-1}$$
$$2b_1\sum_{m=1}^{n-1}c_{n-m}a_{2m}=(c_{n-1}b_3-c_nb_1)+(c_{n-2}b_5-c_{n-1}b_3)+\cdots+(c_1b_{2n-1}-c_2b_{2n-3})$$
$$=c_1b_{2n-1}-c_nb_1\quad(n\geqq 2)$$

よって，$a_{2n}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}c_{n-m}a_{2m}=a_{2n}+\frac{c_1b_{2n-1}}{2b_1}-\frac{c_n}{2}=\frac{2a_{2n}b_1+c_1b_{2n-1}}{2b_1}-\frac{c_n}{2}$

⑦より，$2a_{2n}b_1+c_1b_{2n-1}=b_{2n+1}$ となるので，$a_{2n}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}c_{n-m}a_{2m}=\frac{b_{2n+1}}{2b_1}-\frac{c_n}{2}$

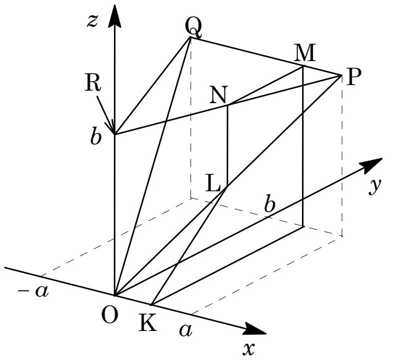
［解 説］

与えられた連立漸化式は有名なタイプで，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項は簡単に求まります。これを利用して，すべて証明できますが，出題者の意図には反するでしょう。なお，漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

2

問題のページへ

(1)　△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_1 を，点 $\mathrm{K}(k,\ 0,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし，yz 平面に関する対称性より，$0\leqq k\leqq a$ とする。



ここで，辺 OP と平面 $x=k$ との交点を L とおくと，点 L は線分 OP を $k:a-k$ に内分することより，$\mathrm{L}\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ \dfrac{b}{a}k\right)$ となる。

また，辺 PQ と平面 $x=k$ との交点を M とおくと，$\mathrm{M}(k,\ b,\ b)$ である。

これより，切り口は外径 KM，内径 KL のドーナツ形となり，その面積 $S_1(k)$ は，

$$S_1(k)=\pi(\mathrm{KM}^2-\mathrm{KL}^2)=\pi\left\{(b^2+b^2)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}=\frac{2b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_1 の体積 V_1 は，

$$V_1=2\int_0^a S_1(k)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\left[a^2k-\frac{k^3}{3}\right]_0^a=\frac{8}{3}\pi ab^2$$

条件より，$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)$ なので，$b^2=1-a^2\ (0<a<1)$ となり，

$$V_1=\frac{8}{3}\pi a(1-a^2)=\frac{8}{3}\pi(a-a^3)$$

$$\frac{dV_1}{da}=\frac{8}{3}\pi(1-3a^2)$$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dV_1}{da}$		$+$	0	$-$	
V_1		↗	$\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$	↘	

よって，V_1 の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

(2)　辺 RP と平面 $x=k$ との交点を N とおくと，点 N は線分 RP を $k:a-k$ に内分することより，$\mathrm{N}\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ b\right)$ となる。

これより，△PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_2 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KM，内径 KN のドーナツ形となり，その式は，

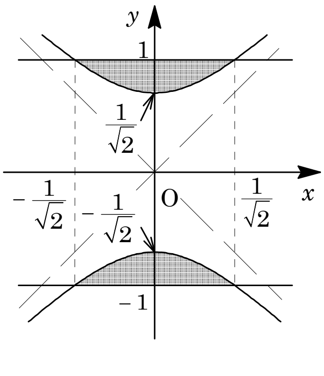
$\mathrm{KM}^2=2b^2$，$\mathrm{KN}^2=\dfrac{b^2}{a^2}k^2+b^2$ から，

$$x=k\ ,\ \frac{b^2}{a^2}k^2+b^2\leqq y^2+z^2\leqq 2b^2$$

すると，k を消去することで，立体 F_2 を表す式は，

$\dfrac{b^2}{a^2}x^2+b^2\leqq y^2+z^2\leqq 2b^2$ となり，$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$$x^2+\frac{1}{2}\leqq y^2+z^2\leqq 1$$



F_2 の xy 平面による切り口は，$z=0$ を代入して，$x^2+\dfrac{1}{2}\leqq y^2\leqq 1$ から，

$$2x^2-2y^2\leqq -1\,,\ \ -1\leqq y\leqq 1$$

よって，切り口の周は右上図の網点部の周である。

(3)　△OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_3 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KN，内径 KL のドーナツ形となる。その面積 $S_3(k)$ は，

$$S_3(k)=\pi(\mathrm{KN}^2-\mathrm{KL}^2)=\pi\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+b^2\right)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_3 の体積 V_3 は，$0\leqq k\leqq a$ から，

$$V_3=\int_0^a S_3(k)\,dk=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{2}{3}\pi ab^2=\frac{1}{4}V_1$$

よって，(1)より，V_3 は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi=\dfrac{4}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

［解　説］

図形の回転体の体積を求める有名問題です。ただ，同じような設問が 3 題続くと，食傷気味になってしまいます。

3　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x^2+x$ に対して，$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0$

よって，$f(x)$ はつねに増加する関数である。

(2)　(1)より，$f(x)$ は逆関数 $g(x)$ が存在し，

$$(x+1)^3-f(x)=4x^2+2x+1=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$f(x)-(x-1)^3=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

よって，$(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$ である。

ここで，$y=f(x)$ とおくと，$x=g(y)$ となり，

$$\{g(y)-1\}^3<f(g(y))<\{g(y)+1\}^3,\ \{g(y)-1\}^3<y<\{g(y)+1\}^3$$

よって，$g(y)-1<\sqrt[3]{y}<g(y)+1$ から，$\sqrt[3]{y}-1<g(y)<\sqrt[3]{y}+1$

すると，$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ ………①

(3)　不等式 $0<\dfrac{1}{x^2+1}<\dfrac{1}{x^2}$ が成立することより，$b>a>0$ について，

$$0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\int_a^b\frac{1}{x^2}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=-\left[\frac{1}{x}\right]_a^b=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$ ………③

②③より，$\displaystyle 0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ ………④

(4)　$\displaystyle A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$ に対して，$g(x)=y$ とおくと，$x=f(y)$ となり，

$x=n\to 2n$ のとき $y=g(n)\to g(2n)$ から，$\alpha_n=g(n)$，$\beta_n=g(2n)$ とおくと，

$$A_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^3+y}\cdot f'(y)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{3y^2-2y+1}{y^3+y}dy$$

さて，$\dfrac{3y^2-2y+1}{y^3+y}=\dfrac{a}{y}+\dfrac{by+c}{y^2+1}$ とおくと，$3y^2-2y+1=a(y^2+1)+y(by+c)$

係数を比べると，$a=1$，$b=2$，$c=-2$ となり，

$$A_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y-2}{y^2+1}\right)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y}{y^2+1}-\frac{2}{y^2+1}\right)dy$$

$$=\left[\log y(y^2+1)\right]_{\alpha_n}^{\beta_n}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy$$

$$=\log\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

①より，$\sqrt[3]{n}-1<\alpha_n<\sqrt[3]{n}+1$，$\sqrt[3]{2n}-1<\beta_n<\sqrt[3]{2n}+1$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{2n}-1}{\sqrt[3]{n}+1}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2n}+1}{\sqrt[3]{n}-1},\quad \frac{\sqrt[3]{2}-(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1+(\sqrt[3]{n})^{-1}}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1-(\sqrt[3]{n})^{-1}}$$

よって，$\gamma_n=\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\sqrt[3]{2}$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\gamma_n\cdot\frac{{\gamma_n}^2+({\alpha_n}^2)^{-1}}{1+({\alpha_n}^2)^{-1}}=\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2=2\cdots\cdots\cdots⑥$$

④より，$\displaystyle 0<\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy<\frac{1}{\alpha_n}$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy=0\cdots\cdots\cdots⑦$

⑤⑥⑦より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=\log 2$

［解　説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。誘導はついているものの，その意味を考えながら計算を進める必要があります。時間をかけて演習するのに適した 1 題です。なお, (2)の不等式$(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$は，結論を同値変形して得たものです。