1

解答解説のページへ

以下の各問いに答えよ。

(1) 実数α，βが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=1$を満たすとき，$\alpha+\beta$の値を求めよ。

(2) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$の値は一定であることを示せ。

(3) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$のとりうる値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次正方行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のうち，次の 3 条件(i)，(ii)，(iii)を満たすもの全体の集合を M とする。

(i)　a, b, c, d はすべて整数

(ii)　$b+c=0$

(iii)　$a-b-d=0$

また E を 2 次単位行列とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　行列 A, B がともに M の要素であるとき，それらの積 AB も M の要素であることを示せ。

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるとき，$ad-bc=1$ が成立することを示せ。

(3)　行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに M の要素であるような A をすべて求めよ。

(4)　自然数 n について，M の要素であって $A^n=E$ を満たすような行列 A の全体の集合を S_n とする。S_n の要素の個数がちょうど 3 となる n をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

m, n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を m, n を用いて表せ。

(3)　a, b, c を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i)　$g(0)=g(1)=0$

(ii)　$0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$

(4)　m, n が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$\tan\alpha\tan\beta=1$ より，$\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\beta}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ となり，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

(2)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ より $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$

さらに，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ から $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma(\tan\alpha+\tan\beta)$$
$$=\tan\alpha\tan\beta+\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}(\tan\alpha+\tan\beta)$$
$$=\tan\alpha\tan\beta+\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}(\tan\alpha+\tan\beta)=1$$

(3)　(2)より，$(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^2=\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma+2$ ………①

ここで，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$ より，

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqq\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1 \text{ ………②}$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^2\geqq 1+2=3$ ………③

なお，等号は，$\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma$ $\left(\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}\right)$ のときに成立する。

また，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ を満たしながら，$\alpha\to\dfrac{\pi}{2}-0$，$\beta\to+0$，$\gamma\to+0$ とすると，

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\to\infty$$

以上より，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ のとりうる値の範囲は，③から，

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqq\sqrt{3}$$

［解　説］

ときどき見かける問題の 1 つです。(3)は(2)を誘導として利用しましたが，凸関数に注目する方法も考えられます。

2

問題のページへ

(1) 行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対し，集合 M の要素である条件は，成分がすべて整数であり，$c=-b$，$d=a-b$ を満たすことなので，A, B がともに M の要素であるとき，

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p-q \end{pmatrix}$$

すると，$AB=\begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp-bq \\ -bp-aq+bq & -bq+ap-aq-bp+bq \end{pmatrix}$となり，積 AB も M の要素である。

(2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対し，$\det A=ad-bc$ とおくと，$AA^{-1}=E$ から，

$$\det(AA^{-1})=\det E,\ \det A\cdot\det A^{-1}=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，A, A^{-1}がともに M の要素であるとき，$\det A$，$\det A^{-1}$はともに整数であり，しかも①から $\det A$ は 1 の約数となり，

$$\det A=a(a-b)-b(-b)=a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$$

よって，$\det A=ad-bc=1$ が成立する。

(3) (2)より，$\det A=a^2-ab+b^2=1$ なので，$a^2-ba+b^2-1=0\ \cdots\cdots②$となり，

$$D=b^2-4(b^2-1)=-3b^2+4\geqq 0$$

よって，$|b|\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である。すると，b は整数より，$b=-1,\ 0,\ 1$ となる。

(i) $b=-1$ のとき　②より $a^2+a=0$ から，$a=0,\ -1$

(ii) $b=0$ のとき　②より $a^2-1=0$ から，$a=1,\ -1$

(iii) $b=1$ のとき　②より $a^2-a=0$ から，$a=0,\ 1$

(i)~(iii)より，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $A^n=E$ から $\det A^n=\det E$ となり，$(\det A)^n=1$

すると，(2)から $\det A=1$ であるので，行列 A は(3)の 6 種類となる。

(a) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$のとき　$A^2-A+E=O$ となるので，

$$(A+E)(A^2-A+E)=O,\ A^3+E=O$$

すると，$A^3=-E$ から，$A^6=E$

(b) $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$のとき　$A^2+A+E=O$ となるので，

$$(A-E)(A^2+A+E)=O,\ A^3-E=O$$

すると，$A^3=E$

(c)　$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$のとき　$A=E$

(d)　$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$のとき　$A=-E$ より $A^2=E$

(e)　$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$のとき　$A^2+A+E=O$ となるので,

$(A-E)(A^2+A+E)=O$，$A^3-E=O$

すると，$A^3=E$

(f)　$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$のとき　$A^2-A+E=O$ となるので,

$(A+E)(A^2-A+E)=O$，$A^3+E=O$

すると，$A^3=-E$ から，$A^6=E$

さて, M の要素であって $A^n=E$ を満たすような行列 A の全体の集合 S_n に対し, S_n の要素の個数は, (a)～(f)より，$n=1$ のとき 1 個，$n=2$ のとき 2 個，$n=3$ のとき 3 個，$n=4$ のとき 2 個，$n=5$ のとき 1 個，$n=6$ のとき 6 個である。そして, いずれの行列 A も $A^6=E$ となるので，S_n の要素の個数についての数列は周期 6 となり，$n \geqq 7$ のときも同様である。

以上より，S_n の要素の個数がちょうど 3 となる n は, k を 0 以上の整数として, $n=6k+3$ と表せる。

［解　説］

行列と整数の融合問題です。(3)の不定方程式は ab 平面上で楕円が対応するので, 実数解条件で値を絞り込んでいます。また, (4)は(3)の結果に注目するのが要です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^m(1-x)^n$ に対し,

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-x^m\cdot n(1-x)^{n-1}$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-nx)$$
$$=-x^{m-1}(1-x)^{n-1}\{(m+n)x-m\}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右上表のようになり，その最大値は,

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n=\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}$$

(2)　$I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおくと,

$$I(m,\ n)=\frac{1}{m+1}\Big[\,x^{m+1}(1-x)^n\,\Big]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2)$$
$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}I(m+n-1,\ 1)$$

ここで，$I(m+n-1,\ 1)=\displaystyle\int_0^1 x^{m+n-1}(1-x)dx=\Big[\,\frac{x^{m+n}}{m+n}-\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\,\Big]_0^1$

$$=\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}=\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$$

よって，$I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}\cdot\dfrac{n-1}{m+2}\cdot\dfrac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{m+n-1}\cdot\dfrac{1}{(m+n)(m+n+1)}$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(3)　関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ に対し，条件(i)より，$g(0)=g(1)=0$ なので,

$g(x)=ax(x-1)$ ………①

また，条件(ii)より，$0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$ なので,

$$g(x)-f(x)=ax(x-1)-x^m(1-x)^n=-x(1-x)\{a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\}\geqq 0$$

よって，$a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq 0$，$x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq -a$ ………②

ここで，$h(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ とおくと,

(i)　$m-1\geqq 1,\ n-1\geqq 1$ $(m\geqq 2,\ n\geqq 2)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最大値は，(1)の結果を用いると,

$$\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m-1+n-1)^{m-1+n-1}}=\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$$

よって，②より，$-a\geqq\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$

(ii)　$m=1,\ n=1$ のとき

$h(x)=1$ となり，②より，$-a\geqq 1$

(iii)　$m=1,\ n\geqq 2$ のとき

$h(x)=(1-x)^{n-1}$ となり，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a\geqq 1$

(iv)　$m\geqq 2,\ n=1$ のとき

$h(x)=x^{m-1}$ となり，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a\geqq 1$

さて，$g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a,\ b,\ c)$ は，②から $a<0$ として，

$$M(a,\ b,\ c)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a$$

以上より，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値は，$m\geqq 2,\ n\geqq 2$ のとき $\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$，

$m=1$ または $n=1$ のとき $\dfrac{1}{4}$ である。

(4)　(1)より，$f(x)\leqq\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ $\left(\text{等号は} x=\dfrac{m}{m+n} \text{のとき}\right)$ より，

$$\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}dx,\quad \frac{m!n!}{(m+n+1)!}<\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

よって，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ ………③

また，(1)(3)から，$m>n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\leqq\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}\geqq\frac{4(m+n-2)^{m+n-2}}{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}} \text{………④}$$

$J(m,\ n)=\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ とおくと，④より $J(m,\ n)\geqq 4J(m-1,\ n-1)$ となり，

$$J(m,\ n)\geqq 4^{n-1}J(m-n+1,\ 1)$$

ここで，$J(m-n+1,\ 1)=\dfrac{(m-n+2)^{m-n+2}}{(m-n+1)^{m-n+1}}=(m-n+2)\left(\dfrac{m-n+2}{m-n+1}\right)^{m-n+1}>2$

よって，$J(m,\ n)>2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$ ……⑤となり，③⑤から，

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!}>\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$$

［解 説］

前半は有名問題ですが，後半はこの結果を誘導として利用するもので，実質的に 2 題分以上の分量があります。どこまで記述できるかが問われています。