1

解答解説のページへ

自然数 n に対し，3 個の数字 1，2，3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ に対し，次の 2 つの条件を考える。

条件 C_{12} ： $1 \leqq i < j \leqq n$ である整数 i, j の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

条件 C_{123} ： $1 \leqq i < j < k \leqq n$ である整数 i, j, k の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$，$x_k = 3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

たとえば，S_4 の要素 $(3,\ 1,\ 2,\ 2)$ は条件 C_{12} は満たすが，条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$，条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2)　$f(n)$ を n を用いて表せ。

(3)　$g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4)　$g(n)$ を n を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の実数, k を自然数とし, $x>0$ で定義される関数 $f(x)=\int_a^{ax}\frac{k+\sqrt[k]{u}}{ku}du$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減および凹凸を調べ, $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　S を正の実数とするとき, $f(p)=S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　$b=\frac{k}{k+\sqrt[k]{a}}$ とおくとき, (2)の S, p について, 次の不等式が成立することを示せ。

$$1+bS<p<e^{bS}$$

1　問題のページへ

(1)　S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たすものの個数を $F(n)$，満たさないものの個数を $f(n)$ とし，条件 C_{123} を満たすものの個数を $G(n)$，満たさないものの個数を $g(n)$ とおくと，

$$f(n)=3^n-F(n),\ g(n)=3^n-G(n)$$

さて，$n=3$ のとき，C_{12} を満たす $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ は，$(1,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 1)$，$(1,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 2)$，$(3,\ 1,\ 2)$ となり，

$$f(3)=3^3-F(3)=27-7=20$$

また，C_{123} を満たす $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ は，$(1,\ 2,\ 3)$ のみで，

$$g(3)=3^3-G(3)=27-1=26$$

次に，$n=4$ のとき，C_{12} を満たす $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ については，

(i)　$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が C_{12} を満たすとき

$x_4=1$，$x_4=2$，$x_4=3$ のいずれでも，C_{12} を満たす。

(ii)　$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が C_{12} を満たさないとき

$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ のうち 1 が少なくとも 1 つある，すなわち 2, 3 のみの 2^3 個以外のものについては，$x_4=2$ とすると，C_{12} を満たす。

(i)(ii)より，$F(4)=3F(3)+\{3^3-F(3)-2^3\}=2F(3)+19=33$ となり，

$$f(4)=3^4-F(4)=81-33=48$$

さらに，$n=4$ のとき，C_{123} を満たす $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ については，

(iii)　$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が C_{123} を満たすとき

$x_4=1$，$x_4=2$，$x_4=3$ のいずれでも，C_{123} を満たす。

(iv)　$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ が C_{123} を満たさないとき

$(x_1,\ x_2,\ x_3)$ のうち C_{12} を満たす $F(3)=7$ 個のものについては，$x_4=3$ とすると，C_{123} を満たす。

(iii)(iv)より，$G(4)=3G(3)+\{F(3)-G(3)\}=2G(3)+F(3)=9$ となり，

$$g(4)=3^4-G(4)=81-9=72$$

(2)　(1)と同様に考えると，$f(3)=20$ で，$n\geqq 3$ において，

$$F(n+1)=3F(n)+\{3^n-F(n)-2^n\}=2F(n)+3^n-2^n$$

すると，$3^{n+1}-f(n+1)=2\{3^n-f(n)\}+3^n-2^n$ となり，

$$f(n+1)=2f(n)+2^n,\ \frac{f(n+1)}{2^{n+1}}=\frac{f(n)}{2^n}+\frac{1}{2}$$

これより，$\dfrac{f(n)}{2^n}=\dfrac{f(3)}{2^3}+\dfrac{1}{2}(n-3)=\dfrac{1}{2}(n+2)$ となり，

$$f(n)=\frac{1}{2}(n+2)\cdot 2^n=(n+2)\cdot 2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

なお，$f(1)=3$，$f(2)=8$ より，①は $n\geqq 1$ のとき成立する。

(3)　(1)と同様に考えると，$n\geqq 3$ において，

$$G(n+1)=3G(n)+\{F(n)-G(n)\}=2G(n)+F(n)$$

すると，$3^{n+1}-g(n+1)=2\{3^n-g(n)\}+3^n-f(n)$ となり，

$$g(n+1)=2g(n)+f(n)\cdots\cdots\cdots②$$

なお，$f(1)=3$，$g(1)=3$，$g(2)=9$ より $g(2)=2g(1)+f(1)$，また $f(2)=8$，$g(3)=26$ より $g(3)=2g(2)+f(2)$ となり，②は $n\geqq 1$ のとき成立する。

(4)　①②より，$g(n+1)=2g(n)+(n+2)\cdot 2^{n-1}$ となり，

$$\frac{g(n+1)}{2^{n+1}}=\frac{g(n)}{2^n}+\frac{1}{4}(n+2)$$

すると，$n\geqq 2$ において，

$$\frac{g(n)}{2^n}=\frac{g(1)}{2^1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3+(n+1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{1}{8}(n^2+3n+8)$$

よって，$g(n)=(n^2+3n+8)\cdot 2^{n-3}\cdots\cdots\cdots③$

なお，$g(1)=3$ より，③は $n\geqq 1$ のとき成立する。

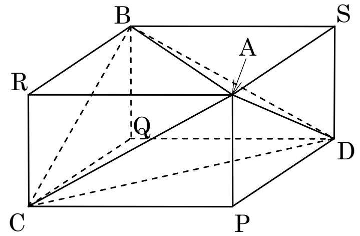
［解　説］

確率の問題ではたまにあるのですが，付いている誘導にどうも波長が合いません。上の解答例は考えたとおりに記したもので，(1)の記述量が非常に多く，出題意図に即したとは思えないものですが……。

2

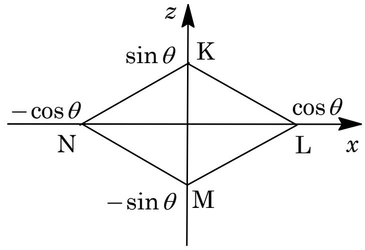
問題のページへ

(1) 点 $A(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$B(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$D(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，それぞれ xy 平面に関する対称な 4 つの点 $P(\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$，$Q(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$R(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$S(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ を定める。



すると，四面体 ABCD は，直方体 ARBS-PCQD に埋め込まれる。

ここで，四面体の辺 AB, AC, DC, DB と xz 平面との交点は，それぞれの辺の中点となり，これを K, L, M, N とおくと，$K(0,\ 0,\ \sin\theta)$，$L(\cos\theta,\ 0,\ 0)$，$M(0,\ 0,\ -\sin\theta)$，$N(-\cos\theta,\ 0,\ 0)$ である。



これより，四面体の xz 平面による切り口はひし形 KLMN となり，その面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\sin2\theta\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に，直方体 ARBS-PCQD の体積を $V_1(\theta)$ とおくと，

$$V_1(\theta)=(2\cos\theta)^2\cdot2\sin\theta=8\sin\theta\cos^2\theta$$

また，4 つの四面体 ABSD, ABRC, CDPA, CDQB は合同であり，その体積を $V_2(\theta)$ とおくと，

$$V_2(\theta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot2\sin\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$

これより，四面体 ABCD の体積 $V(\theta)$ は，

$$V(\theta)=V_1(\theta)-4V_2(\theta)=\left(8-\frac{16}{3}\right)\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta\cdots\cdots\cdots②$$

よって，$V\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}=1$ である。

(2) ①より，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値は，$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ である。

(3) ②より，$V(\theta)=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\frac{8}{3}(\sin\theta-\sin^3\theta)$

ここで，$f(t)=t-t^3\ (0<t<1)$ とおくと，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	

よって，$V(\theta)$ は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる α で，最大値 $V(\alpha)=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{2}{9}\sqrt{3}=\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$ をとる。

［解 説］

解答例に記したように 4 点 P, Q, R, S を設定し，等面四面体は直方体に埋め込まれるという知識の利用がポイントとなります。同様な問題は，たとえば 1993 年の東大や 2006 年の東工大などで出題されていますが，これらの経験がなければ，解法の糸口を見つけるのが難しいと思えます。

3

問題のページへ

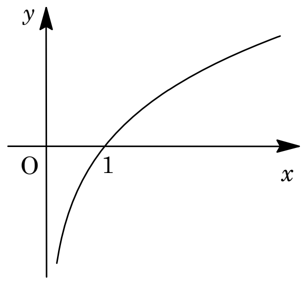
(1)　$f(x)=\int_a^{ax}\dfrac{k+\sqrt[k]{u}}{ku}du$ ($a>0$, $x>0$, kは自然数) に対して，

$$f(x)=\int_a^{ax}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{k}u^{\frac{1}{k}-1}\right)du=\Big[\log|u|+u^{\frac{1}{k}}\Big]_a^{ax}$$

$$=\log ax-\log a+(ax)^{\frac{1}{k}}-a^{\frac{1}{k}}=\log x+\sqrt[k]{a}\,(x^{\frac{1}{k}}-1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt[k]{a}}{k}x^{\frac{1}{k}-1}>0,\ \ f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt[k]{a}}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)x^{\frac{1}{k}-2}<0$$

これより，$x>0$ において $f(x)$ は単調に増加し，曲線 $C: y=f(x)$ は上に凸である。さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，ある $S>0$ に対して，$f(p)=S$ となる p は $p>1$ にただ 1 つ存在する。

(3)　(1)から，$f'(1)=1+\dfrac{\sqrt[k]{a}}{k}=\dfrac{k+\sqrt[k]{a}}{k}$ となり，$bS=\dfrac{k}{k+\sqrt[k]{a}}f(p)=\dfrac{f(p)}{f'(1)}$ より，

$$p-(1+bS)=p-1-\frac{f(p)}{f'(1)}=\frac{f'(1)(p-1)-f(p)}{f'(1)}\cdots\cdots\cdots①$$

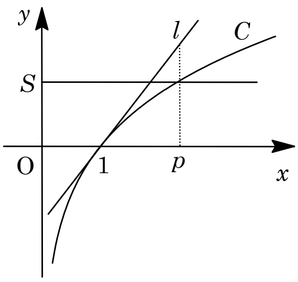
ここで，点(1, 0)における曲線 C の接線 l の方程式は，

$y=f'(1)(x-1)$

すると，$x=p$ のとき $y=f'(1)(p-1)$

さて，(1)から，曲線 C は上に凸なので，接線 l は曲線 C の上側にあり，$x=p$ のとき，

$f'(1)(p-1)>f(p)\cdots\cdots\cdots②$



①②より，$f'(1)>0$ なので，$p-(1+bS)>0$，すなわち $1+bS<p\cdots\cdots③$である。

次に，$g(p)=bS-\log p=bf(p)-\log p$ とおくと，

$$g'(p)=bf'(p)-\frac{1}{p}=\frac{k}{k+\sqrt[k]{a}}\left(\frac{1}{p}+\frac{\sqrt[k]{a}}{k}p^{\frac{1}{k}-1}\right)-\frac{1}{p}=\frac{k}{k+\sqrt[k]{a}}\cdot\frac{k+\sqrt[k]{ap}}{kp}-\frac{1}{p}$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{k+\sqrt[k]{ap}}{k+\sqrt[k]{a}}-1\right)>0$$

これより，$p>1$ において，$g(p)>g(1)=bf(1)-\log 1=0$ となり，$bS>\log p$

よって，$e^{bS}>p$ となるので，③と合わせると，$1+bS<p<e^{bS}$ である。

［解　説］

(3)の不等式の証明は，誘導がないので，難度はかなりのものです。