1

解答解説のページへ

自然数 n に対して，n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。たとえば，$S(9)=1+3+9=13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2) a を自然数とする。$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ。

(3) a を 2 以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間において連立不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す領域を Q とし，正の実数 r に対して $x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$ の表す領域を S とする。また，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし，R の体積を $V(r)$ とする。さらに，$x \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x，$y \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y，$z \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z とし，

$S_x \neq \varnothing$ を満たす r の最小値を r_1，$S_x \cap S_y \neq \varnothing$ を満たす r の最小値を r_2

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \varnothing$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし，$\varnothing$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $r = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2) r_1，r_2，r_3 および $V(r_1)$，$V(r_3)$ を求めよ。

(3) $r \geqq r_1$ のとき，S_x の体積を r を用いて表せ。

(4) $0 < r \leqq r_2$ において，$V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。

3　解答解説のページへ

関数 $f(x)=《x》-2《x-1》+《x-2》$ を考える。ここで，実数 u に対して $《u》=\dfrac{u+|u|}{2}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt$ とおくとき，$g(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　(2)の $g(x)$ に対して，$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx$ とおくとき，$p(s)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{1}$　　問題のページへ

(1)　異なる素数 p, q で $n = p^2q$ のとき，n のすべての正の約数の和 $S(n)$ は，

$$S(n) = (1 + p + p^2)(1 + q)$$

ここで，$S(n) = 2n$ より，$(1 + p + p^2)(1 + q) = 2p^2q$ ………①

すると，$1 + p + p^2$ は p と互いに素な奇数なので，①から，

$$1 + p + p^2 = q \text{ ………②},\ 1 + q = 2p^2 \text{ ………③}$$

②③より，$1 + 1 + p + p^2 = 2p^2$，$p^2 - p - 2 = 0$，$(p+1)(p-2) = 0$

p は素数より $p = 2$ となり，②から $q = 7$ である。そして，q も素数という条件を満たすので，$n = 2^2 \cdot 7 = 28$ である。

(2)　$S(n) = n + 1$ のとき，n の正の約数は 1 と n だけなので，n は素数である。

すなわち，$n = 2^a - 1$ は素数である。

さて，ここで自然数 a が素数でないと仮定すると，$a \geqq 4$ のときは 2 以上の自然数 k, l を用いて，$a = kl$ と表せる。

$$2^a - 1 = 2^{kl} - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^k - 1)(2^{k(l-1)} + 2^{k(l-2)} + \cdots + 2^k + 1)$$

すると，$2^k - 1 \geqq 3$，$2^{k(l-1)} + 2^{k(l-2)} + \cdots + 2^k + 1 \geqq 5$ となり，$2^a - 1$ は素数ではない。よって，a は素数である。

なお，$a = 1$ のとき $2^a - 1 = 1$ となり，この場合はあてはまらない。

以上より，$2^a - 1$ が素数のとき a は素数である。

(3)　a が 2 以上の自然数のとき，$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ に対して $S(n)$ を求めると，

(i)　$2^a - 1$ が素数であるとき

$$S(n) = (1 + 2 + \cdots + 2^{a-1})(1 + 2^a - 1) = \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot 2^a = 2 \cdot 2^{a-1}(2^a - 1) = 2n$$

(ii)　$2^a - 1$ が素数でないとき

$$S(n) > (1 + 2 + \cdots + 2^{a-1})(1 + 2^a - 1) = 2n$$

(i)(ii)より，$S(n) \leqq 2n$ を満たすのは $2^a - 1$ が素数，すなわち(2)から a が素数となる。

さて，2^n を 10 で割った余りを r_n とおくと，

$$r_1 = 2,\ r_2 = 4,\ r_3 = 8,\ r_4 = 6,\ r_5 = 2,\ r_6 = 4,\ \cdots\cdots$$

ここで，$2^{n+4} - 2^n = (2^4 - 1) \cdot 2^n = 15 \cdot 2^n = 10 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}$ となり，2^{n+4} を 10 で割った余り r_{n+4} と，2^n を 10 で割った余り r_n は等しくなる。

したがって，数列 $\{r_n\}$ は 2, 4, 8, 6 をくり返す周期 4 の周期数列である。

(a)　$a = 2$ のとき

$n = 2(2^2 - 1) = 6$ となり，n を 10 で割った余りは 6 である。

(b)　$a \geqq 3$ のとき　a は奇数となるので，m を自然数として mod10 で記すと，

(b-i)　$a = 4m + 1$ のとき

$n = 2^{a-1}(2^a - 1) = 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) \equiv 6\cdot(2-1) \equiv 6$

(b-ii)　$a = 4m - 1$のとき

$n = 2^{a-1}(2^a - 1) = 2^{4m-2}(2^{4m-1} - 1) \equiv 4\cdot(8-1) \equiv 8$

(a)(b)より，nを 10 で割った余り，すなわちnの 1 の位は 6 か 8 である。

［解 説］

(1)(2)が(3)の誘導というタイプの整数問題です。ただ，ストレートな形で前半と後半がつながっているわけではありません。その捻りをどのようにかわしていくかがポイントです。方針がつかめないときは，ここでも具体例で実験です。なお，(1)は初め素数が 2 か 3 以上かで場合分けをしていたのですが，必ずしも必要というわけではないことが途中でわかり，書き直しています。

２　　問題のページへ

(1)　$Q : |x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ かつ $|z| \leqq 1$，$S : x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2$ に対し，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域 R は，

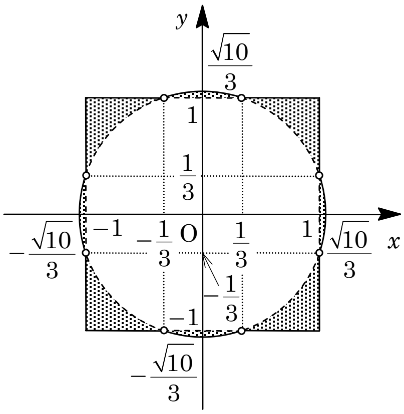
$$R = (Q \cap \overline{S}) \cup (\overline{Q} \cap S)$$

$r = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，xy 平面による R の断面は，$z = 0$ を代入して，

$$Q \cap \overline{S} : (|x| \leqq 1 \text{ かつ } |y| \leqq 1),\ x^2 + y^2 > \frac{10}{9}$$

$$\overline{Q} \cap S : (|x| > 1 \text{ または } |y| > 1),\ x^2 + y^2 \leqq \frac{10}{9}$$

R の断面を xy 平面上で図示すると，右図の網点部となる。



ただし，境界については，実線は含み破線は含まない。

(2)　$x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を，それぞれ S_x，S_y，S_z とする。

まず，$S_x \neq \varnothing$ となるのは，点 $(1,\ 0,\ 0)$ が S に含まれるときより，$1 \leqq r^2$ から，

$$r_1 = 1$$

$S_x \cap S_y \neq \varnothing$ となるのは，点 $(1,\ 1,\ 0)$ が S に含まれるときより，$2 \leqq r^2$ から，

$$r_2 = \sqrt{2}$$

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \varnothing$ となるのは，点 $(1,\ 1,\ 1)$ が S に含まれるときより，$3 \leqq r^2$ から，

$$r_3 = \sqrt{3}$$

また，$r = r_1 = 1$ のとき，S は Q に含まれるので，そのときの R の体積 $V(r_1)$ は，

$$V(r_1) = 2^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 8 - \frac{4}{3}\pi$$

$r = r_3 = \sqrt{3}$ のとき，Q は S に含まれるので，そのときの R の体積 $V(r_3)$ は，

$$V(r_3) = \frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt{3})^3 - 2^3 = 4\sqrt{3}\pi - 8$$

(3)　$r \geqq r_1 = 1$ のとき，S_x は xy 平面上の円板 $x^2 + y^2 \leqq r^2$ の $x \geqq 1$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体であるので，その体積を V_x とすると，

$$V_x = \pi \int_1^r (r^2 - x^2)\,dx = \pi \Big[r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big]_1^r = \pi \Big\{ r^3 - r^2 - \frac{1}{3}(r^3 - 1) \Big\}$$
$$= \pi \Big(\frac{2}{3} r^3 - r^2 + \frac{1}{3} \Big)$$

(4)　$0 < r \leqq r_2 = \sqrt{2}$ において，R の体積 $V(r)$ は，

(i)　$0 < r \leqq 1$ のとき

S は Q に含まれるので，$V(r) = 2^3 - \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 8 - \dfrac{4}{3}\pi r^3$ となり，$V(r)$ は r の増加にともない単調に減少する。

(ii)　$1<r\leqq\sqrt{2}$ のとき

対称性から，$Q\cap\overline{S}$ の立体の体積は $6V_x+2^3-\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$\overline{Q}\cap S$ の立体の体積は $6V_x$ となることより，R の体積 $V(r)$ は，

$$V(r)=6V_x+2^3-\frac{4}{3}\pi r^3+6V_x=12V_x+8-\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$=\pi(8r^3-12r+4)-\frac{4}{3}\pi r^3+8$$
$$=\pi\left(\frac{20}{3}r^3-12r^2+4\right)+8$$
$$V'(r)=\pi(20r^2-24r)=4\pi r(5r-6)$$

すると，$V(r)$ の増減は右表のようになる。

r	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$-$	0	$+$	
$V(r)$		↘		↗	

(i)(ii)より，$V(r)$ は連続的に変化するので，最小となるのは $r=\dfrac{6}{5}$ のときである。

［解　説］

立体の体積計算の問題です。対称性に注目し，原点が中心で 1 辺の長さが 2 の立方体 Q と，原点が中心で半径 r の球 S との関係をイメージしながら解いていきます。

3　　問題のページへ

(1)　$\langle\!\langle u \rangle\!\rangle=\dfrac{u+|u|}{2}$ より，$u \geqq 0$ のとき $\langle\!\langle u \rangle\!\rangle=u$，$u<0$ のとき $\langle\!\langle u \rangle\!\rangle=0$ である。

さて，$f(x)=\langle\!\langle x \rangle\!\rangle-2\langle\!\langle x-1 \rangle\!\rangle+\langle\!\langle x-2 \rangle\!\rangle$ に対して，

(i)　$x<0$ のとき　$f(x)=0-2\cdot 0+0=0$

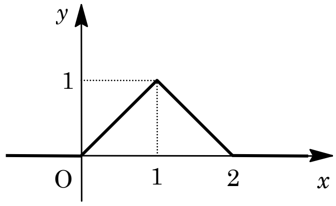
(ii)　$0 \leqq x<1$ のとき　$f(x)=x-2\cdot 0+0=x$

(iii)　$1 \leqq x<2$ のとき

$$f(x)=x-2(x-1)+0=-x+2$$

(iv)　$x \geqq 2$ のとき

$$f(x)=x-2(x-1)+(x-2)=0$$



(i)〜(iv)より，$y=f(x)$ のグラフは右図の太線部。

(2)　$x-t=u$ とおくと，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt=\int_x^{x-1} f(u)(-du)=\int_{x-1}^{x} f(u)\,du$

(i)　$x<0$ のとき　$g(x)=0$

(ii)　$0 \leqq x<1$ のとき　$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

(iii)　$1 \leqq x<2$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}\{(x-1)+1\}\{1-(x-1)\}+\frac{1}{2}\{1+(-x+2)\}(x-1)$$

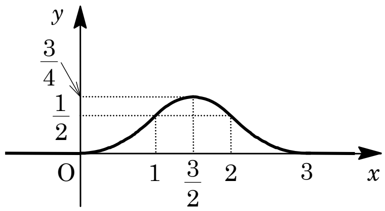
$$=\frac{1}{2}x(2-x)+\frac{1}{2}(3-x)(x-1)=-x^2+3x-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(iv)　$2 \leqq x<3$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}\{-(x-1)+2\}\{2-(x-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(x-3)^2$$

(v)　$x \geqq 3$ のとき　$g(x)=0$



(i)〜(v)より，$y=g(x)$ のグラフは右図の太線部。

よって，$g(x)$ は $x=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

(3)　$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx$ に対して，

$$p(s)=\int_0^3 x^2 g(x)\,dx-2s\int_0^3 xg(x)\,dx+s^2\int_0^3 g(x)\,dx$$

ここで，$a=\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx$，$b=\displaystyle\int_0^3 xg(x)\,dx$，$c=\displaystyle\int_0^3 x^2 g(x)\,dx$ とおくと，

$$p(s)=as^2-2bs+c=a\left(s-\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$y=g(x)$ は $x=\dfrac{3}{2}$ に関して対称なので，$g(3-x)=g(x)$ となり，

$$a=2\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx+2\int_1^{\frac{3}{2}}\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}x\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=1\cdots\cdots\cdots②$$

次に，$h_1(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)g(x)$ とおくと，

$$h_1(3-x)=\left(3-x-\frac{3}{2}\right)g(3-x)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)g(x)=-h_1(x)$$

すると，$\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}\right)g(x)dx=0\cdots\cdots③$となるので，②から，

$$b=\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)g(x)dx=\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}\right)g(x)dx+\frac{3}{2}\int_0^3 g(x)dx=\frac{3}{2}$$

さらに，$h_2(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2g(x)$ とおくと $h_2(3-x)=h_2(x)$ となり，②③から，

$$c=\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2g(x)dx=\int_0^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2g(x)dx+\frac{9}{4}\int_0^3 g(x)dx$$

$$=2\int_0^1\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}x^2dx+2\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}dx+\frac{9}{4}$$

$$=\int_0^1\left(x^4-3x^3+\frac{9}{4}x^2\right)dx+2\int_1^{\frac{3}{2}}\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\right)^4+\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right\}dx+\frac{9}{4}$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{4}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{2}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)^5+\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_1^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$$

以上より，$p(s)$ の最小値は，①から $a>0$ なので，$c-\frac{b^2}{a}=\frac{5}{2}-\frac{9}{4}=\frac{1}{4}$ である。

［解　説］

定積分の計算問題です。(3)の前半までスムーズに進みますが，最後の詰めの段階で直球勝負を避けたい積分計算が現れます。解答例では対称性に着目して，計算量を少々減らしています。なお，(2)では面積を対応させて $g(x)$ を計算しました。