

1

解答解説のページへ

n を自然数とする。1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて、順に $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ とおく。また、次の条件 (C1), (C2) が成立しているとする。

(C1) $3n$ 個の組 $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_n - a_{n+1}|, |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|, |a_1 - c_1|, |a_2 - c_2|, \dots, |a_n - c_n|$ は、すべて互いに異なる。

(C2) 1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し、 $|a_k - b_k| > |a_k - c_k| > |a_k - a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $n=1$ かつ $a_1=1$ のとき、 a_2, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) $n=2$ かつ $a_1=7$ のとき、 $a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ を求めよ。
- (3) $n \geq 2$ かつ $a_1=1$ のとき、 a_3 を求めよ。
- (4) $n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき、 a_{29}, b_{29}, c_{29} を求めよ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間において、点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(0, 0, 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) 球面 σ の方程式を求めよ。
- (2) xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して、線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AP}$ を示せ。
- (3) 点 $S(p, q, r)$ を、 $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{AS} = -|\overrightarrow{OS}|^2$ を満たす、 xy 平面上にない定点とする。 σ 上の点 Q が $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{SQ}$ を満たしながら動くとき、直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。 p, q, r を用いて答えよ。

3

解答解説のページへ

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

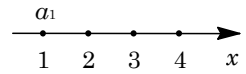
- (1) a と $f(0) + f(1)$ の値を求めよ。
- (2) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくと、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) $n=1$ のとき, 1, 2, 3, 4 を並べかえると, a_1, a_2, b_1, c_1 となる。さて, $a_1=1$ から, $\{a_2, b_1, c_1\}=\{2, 3, 4\}$ となり, 条件(C2)から,

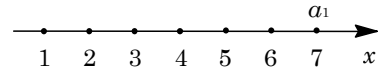
$$|1-b_1| > |1-c_1| > |1-a_2|$$



すると, $b_1=4, c_1=3, a_2=2$ となり, $(a_2, b_1, c_1)=(2, 4, 3)$

- (2) $n=2$ のとき, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 を並べかえると, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$ となる。さて, $a_1=7$ から, $\{a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ となり, 条件(C2)から,

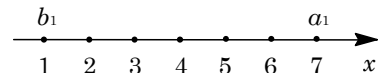
$$|7-b_1| > |7-c_1| > |7-a_2| \cdots \cdots \textcircled{1}$$



$$|a_2-b_2| > |a_2-c_2| > |a_2-a_3| \cdots \cdots \textcircled{2}$$

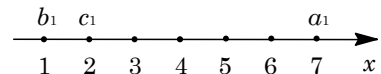
なお, 条件(C1)から, $|7-b_1|, |7-c_1|, |7-a_2|, |a_2-b_2|, |a_2-c_2|, |a_2-a_3|$ は異なり, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。このとき $|a_2-b_2| \leq 5$ なので, $6=|7-b_1|$ すなわち $b_1=1$ となり, ①から,

$$6 > |7-c_1| > |7-a_2| \cdots \cdots \textcircled{3}$$



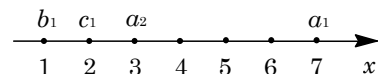
なお, 条件(C1)から, $|7-c_1|, |7-a_2|, |a_2-b_2|, |a_2-c_2|, |a_2-a_3|$ は異なり, 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかである。このとき $|a_2-b_2| \leq 4$ なので, $5=|7-c_1|$ すなわち $c_1=2$ となり, ③から,

$$5 > |7-a_2| \cdots \cdots \textcircled{4}$$



なお, 条件(C1)から, $|7-a_2|, |a_2-b_2|, |a_2-c_2|, |a_2-a_3|$ は異なり, 1, 2, 3, 4 のいずれかである。このとき $|a_2-b_2| \leq 3$ なので, $4=|7-a_2|$ すなわち $a_2=3$ となり, ②から,

$$|3-b_2| > |3-c_2| > |3-a_3| \cdots \cdots \textcircled{5}$$



なお, 条件(C1)から, $|3-b_2|, |3-c_2|, |3-a_3|$ は 1, 2, 3 のいずれかである。

すると, ⑤から, $b_2=6, c_2=5, a_3=4$ となり,

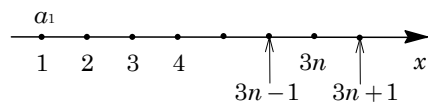
$$(a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2) = (3, 4, 1, 6, 2, 5)$$

- (3) 1, 2, 3, ..., $3n+1$ を並べかえると, $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ となる。さて, $a_1=1$ から,

$$\{a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_2, c_1, \dots, c_n\} = \{2, 3, \dots, 3n+1\}$$

条件(C2)から, $2 \leq i \leq n$ として,

$$|1-b_1| > |1-c_1| > |1-a_2| \cdots \cdots \textcircled{6}$$



$$|a_i-b_i| > |a_i-c_i| > |a_i-a_{i+1}| \cdots \cdots \textcircled{7}$$

なお, 条件(C1)から, $|1-b_1|, |1-c_1|, |1-a_2|, |a_2-b_2|, |a_2-c_2|, |a_2-a_3|, \dots, |a_n-a_{n+1}|$ は異なり, 1, 2, 3, ..., $3n$ のいずれかである。このとき $|a_i-b_i| \leq 3n-1$ なので, $3n=|1-b_1|$ すなわち $b_1=3n+1$ となり, ⑥から,

$$3n > |1 - c_1| > |1 - a_2| \cdots \cdots \textcircled{8}$$

なお、条件 (C1) から、 $|1 - c_1|$ 、 $|1 - a_2|$ 、 $|a_2 - b_2|$ 、 $|a_2 - c_2|$ 、 $|a_2 - a_3|$ 、 \cdots 、 $|a_n - a_{n+1}|$ は異なり、 $1, 2, 3, \cdots, 3n - 1$ のいずれかである。このとき $|a_i - b_i| \leq 3n - 2$ なので、 $3n - 1 = |1 - c_1|$ すなわち $c_1 = 3n$ となり、 $\textcircled{8}$ から、

$$3n - 1 > |1 - a_2| \cdots \cdots \textcircled{9}$$

なお、条件 (C1) から、 $|1 - a_2|$ 、 $|a_2 - b_2|$ 、 $|a_2 - c_2|$ 、 $|a_2 - a_3|$ 、 \cdots 、 $|a_n - a_{n+1}|$ は異なり、 $1, 2, 3, \cdots, 3n - 2$ のいずれかである。このとき $|a_i - b_i| \leq 3n - 3$ なので、 $3n - 2 = |1 - a_2|$ すなわち $a_2 = 3n - 1$ となり、 $\textcircled{7}$ から、 $3 \leq j \leq n$ として、

$$|3n - 1 - b_2| > |3n - 1 - c_2| > |3n - 1 - a_3| \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$$|a_j - b_j| > |a_j - c_j| > |a_j - a_{j+1}|$$

なお、条件 (C1) から、 $|3n - 1 - b_2|$ 、 $|3n - 1 - c_2|$ 、 $|3n - 1 - a_3|$ 、 \cdots 、 $|a_n - a_{n+1}|$ は異なり、 $1, 2, 3, \cdots, 3n - 3$ のいずれかである。このとき $|a_j - b_j| \leq 3n - 4$ なので、 $3n - 3 = |3n - 1 - b_2|$ すなわち $b_2 = 2$ となり、 $\textcircled{10}$ から、

$$3n - 3 > |3n - 1 - c_2| > |3n - 1 - a_3| \cdots \cdots \textcircled{11}$$

なお、条件 (C1) から、 $|3n - 1 - c_2|$ 、 $|3n - 1 - a_3|$ 、 \cdots 、 $|a_n - a_{n+1}|$ は異なり、 $1, 2, 3, \cdots, 3n - 4$ のいずれかである。このとき $|a_j - b_j| \leq 3n - 5$ なので、 $3n - 4 = |3n - 1 - c_2|$ すなわち $c_2 = 3$ となり、 $\textcircled{11}$ から、

$$3n - 4 > |3n - 1 - a_3| \cdots \cdots \textcircled{12}$$

なお、条件 (C1) から、 $|3n - 1 - a_3|$ 、 \cdots 、 $|a_n - a_{n+1}|$ は異なり、 $1, 2, 3, \cdots, 3n - 5$ のいずれかで、 $|a_j - b_j| \leq 3n - 6$ から $3n - 5 = |3n - 1 - a_3|$ すなわち $a_3 = 4$ である。

(4) $n = 2017$ のとき $3n + 1 = 6052$ となり、(2)(3)と同様にすると、

$$a_1 = 1, b_1 = 6052, c_1 = 6051, a_2 = 6050, b_2 = 2, c_2 = 3$$

$$a_3 = 4, b_3 = 6049, c_3 = 6048, a_4 = 6047, b_4 = 5, c_4 = 6$$

$$\text{すると、} 29 = 2 \times 15 - 1 \text{ より、帰納的に、} a_{29} = 1 + 3(15 - 1) = 43$$

$$b_{29} = 6052 - 3(15 - 1) = 6010, c_{29} = 6051 - 3(15 - 1) = 6009$$

[解説]

実質的に時間無制限の整数問題です。数直線を利用すると、考えを整理しやすくなります。なお、(4)はエネルギー不足で、やや雑な記述になっています。

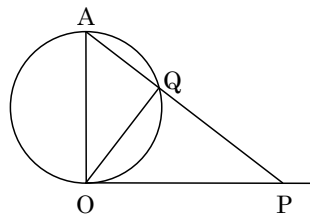
2

問題のページへ

- (1) $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$ に対し, 線分 OA が直径の球面 σ は, 中心 $(0, 0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{1}{2}$ より, その方程式は,

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- (2) xy 平面上の点 $P(P \neq O)$ に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると, この平面による球面 σ の切り口は OA が直径の円となるので, $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AP}$ である。



- (3) $P(x, y, 0)$ とおき, $AQ : QP = t : 1-t$ ($0 < t < 1$) とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OP} = (1-t)(0, 0, 1) + t(x, y, 0) \\ &= (tx, ty, 1-t) \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

- (2) より, $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AP}$ なので, $\overrightarrow{AP} = (x, y, -1)$ から,

$$tx^2 + ty^2 - (1-t) = 0, \quad t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて, $S(p, q, r)$ ($r \neq 0$) から $\overrightarrow{AS} = (p, q, r-1)$ となり, $\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{AS} = -|\overrightarrow{OS}|^2$ より,

$$p^2 + q^2 + r(r-1) = -(p^2 + q^2 + r^2), \quad 2(p^2 + q^2 + r^2) = r \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さらに, $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{SQ}$ なので, ①から $\overrightarrow{SQ} = (tx-p, ty-q, 1-t-r)$ となり,

$$\begin{aligned} p(tx-p) + q(ty-q) + r(1-t-r) &= 0 \\ ptx + qty + r(1-t) &= p^2 + q^2 + r^2 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

- ③④より, $2ptx + 2qty + 2r(1-t) = r$, $2ptx + 2qty - 2tr + r = 0$

- ②を代入すると, $\frac{2px}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2qy}{x^2 + y^2 + 1} - \frac{2r}{x^2 + y^2 + 1} + r = 0$ となり,

$$2px + 2qy - 2r + r(x^2 + y^2 + 1) = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 + \frac{2p}{r}x + \frac{2q}{r}y = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{r}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{r}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{r^2}$$

ここで, ③から $r > 0$ となり, $\left(x + \frac{p}{r}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{r}\right)^2 = \frac{1}{2r}$

したがって, 点 P は xy 平面上で, 中心 $\left(-\frac{p}{r}, -\frac{q}{r}, 0\right)$, 半径 $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ の円を描く。

[解説]

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は, 成分計算を主体として記述しています。

3

問題のページへ

(1) $F'(t) = f(t)$ とおくと, $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$ となり,

$$\int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)dt \right\} du = \int_0^x \{F(u) - F(0)\} du = \int_0^x F(u) du - F(0)x$$

$$\int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)dt \right\} du = \int_x^1 \{F(1) - F(u)\} du = F(1)(1-x) - \int_x^1 F(u) du$$

すると, 与えられた条件式は,

$$F(x) - F(0) = 4ax^3 + (1-3a)x$$

$$+ \int_0^x F(u) du - F(0)x + F(1)(1-x) - \int_x^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①の両辺を x で微分すると,

$$F'(x) = 12ax^2 + (1-3a) + F(x) - F(0) - F(1) + F(x)$$

$$f(x) = 12ax^2 + 1 - 3a + 2F(x) - F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, ①に $x=0$ を代入すると, $0 = F(1) - \int_0^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{3}$

①に $x=1$ を代入すると, $F(1) - F(0) = 4a + 1 - 3a + \int_0^1 F(u) du - F(0)$ より,

$$F(1) = a + 1 + \int_0^1 F(u) du \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③④から, $a + 1 = 0$ となり, $a = -1$ である。

すると, ②から, $f(x) = -12x^2 + 4 + 2F(x) - F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{5}$

⑤に $x=0$, $x=1$ を代入すると,

$$f(0) = 4 + F(0) - F(1) \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad f(1) = -8 + F(1) - F(0) \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑥⑦より, $f(0) + f(1) = 4 - 8 = -4 \cdots \cdots \textcircled{8}$ である。

(2) ⑤の両辺を x で微分すると, $f'(x) = -24x + 2F'(x) = -24x + 2f(x) \cdots \cdots \textcircled{9}$

ここで, $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくとき, ⑨から,

$$g'(x) = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x) = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} \{-24x + 2f(x)\}$$

$$= -24xe^{-2x}$$

(3) (2)より, $g(x) = -24 \int xe^{-2x} dx$ となり, C を定数として,

$$g(x) = 12xe^{-2x} - 12 \int e^{-2x} dx = 12xe^{-2x} + 6e^{-2x} + C = 6(2x+1)e^{-2x} + C$$

すると, $f(x) = e^{2x} g(x)$ より, $f(x) = 6(2x+1) + Ce^{2x}$ となり, ⑧から,

$$(6+C) + (18+Ce^2) = -4, \quad C = -\frac{28}{1+e^2}$$

以上より, $f(x) = 6(2x+1) - \frac{28}{1+e^2} e^{2x}$ である。

[解説]

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが、誘導がていねいなので、方針に迷うことはないでしょう。