1　　解答解説のページへ

0 以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき, } R(x,\ y)=0 \\ xy\neq 0 \text{ のとき, } x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\ r_2=R(b,\ r_1),\ r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。たとえば，$a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$ が成立することを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xyz 空間において，連立不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す領域を Q とし，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球面を S_0 とする。さらに，点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$ を中心とし，S_0 に外接する球面を，それぞれ S_A，S_B，S_C，S_D とする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面 X が球面 Y に外接する」とは，X と Y が互いにその外部にあって，1 点を共有することである。

(1)　S_A と S_B が共有点をもつとき，r の最大値 r_1 を求めよ。

(2)　S_0，S_A，S_B，S_C，S_D およびそれらの内部の領域の和集合と，Q との共通部分の体積を $V(r)$ とする。区間 $r_1 \leqq r \leqq 1$ において，$V(r)$ が最小となる r の値 r_2 を求めよ。ここで r_1 は(1)で求めた値とする。

(3)　S_0 と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれかと共有点をもつとき，r の最大値 r_3 を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1)　p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　u を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq \frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3)　p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。

1　問題のページへ

(1)　数列$\{f_n\}$について，$f_1=f_2=1$，$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$より，

$$1=f_1=f_2<f_3<f_4<f_5<f_6<\cdots\cdots$$

さて，$a=f_{102}$を$b=f_{100}$で割ったとき，$f_{102}=f_{101}+f_{100}$で$f_{100}<f_{101}$から，

$$f_{102}=2f_{100}+(f_{101}-f_{100})$$

よって，$r_1=R(f_{102},\ f_{100})=f_{101}-f_{100}=f_{99}$である。

次に，$b=f_{100}$を$r_1=f_{99}$で割ったとき，$f_{100}=f_{99}+f_{98}$で$f_{98}<f_{99}$から，

$$r_2=R(f_{100},\ f_{99})=f_{98}$$

さらに，$r_1=f_{99}$を$r_2=f_{98}$で割ったとき，$f_{99}=f_{98}+f_{97}$で$f_{97}<f_{98}$から，

$$r_3=R(f_{99},\ f_{98})=f_{97}$$

同様にすると，$r_4=f_{96}$，$r_5=f_{95}$，$\cdots$，$r_{97}=f_3=2$，$r_{98}=f_2=1$

そして，$r_{97}=f_3$を$r_{98}=f_2$で割ったとき，$r_{99}=0$なので，$N=99$である。

(2)　まず, aがbで割り切れないことより，$N\geqq 2$である。

(i)　$N=2$のとき　q_1，q_2を自然数として，

$a=bq_1+r_1$ $(1\leqq r_1<b)$，$b=r_1q_2+r_2$ $(r_2=0)$より，$r_1\geqq 1=f_2=f_N$

(ii)　$N=3$のとき　q_1，q_2，q_3を自然数として，

$$a=bq_1+r_1\ (1\leqq r_1<b),\ b=r_1q_2+r_2\ (1\leqq r_2<r_1),\ r_1=r_2q_3+r_3\ (r_3=0)$$

すると，$r_1>r_2\geqq 1$から，$r_1\geqq 2=f_3=f_N$

(iii)　$N\geqq 4$のとき　q_1，q_2，q_3，$\cdots$，q_{N-1}，q_Nを自然数として，

$$a=bq_1+r_1\ (1\leqq r_1<b),\ b=r_1q_2+r_2\ (1\leqq r_2<r_1),$$

$$r_1=r_2q_3+r_3\ (1\leqq r_3<r_2),\ \cdots\cdots,\ r_{N-3}=r_{N-2}q_{N-1}+r_{N-1}\ (1\leqq r_{N-1}<r_{N-2}),$$

$$r_{N-2}=r_{N-1}q_N+r_N\ (r_N=0)$$

すると，$r_{N-2}>r_{N-1}\geqq 1$より$r_{N-2}\geqq 2$となり，

$$r_{N-3}\geqq r_{N-2}+r_{N-1}\geqq 2+1=f_3+f_2=f_4$$

同様にすると，$r_{N-4}\geqq r_{N-3}+r_{N-2}\geqq f_4+f_3=f_5$

$$r_{N-5}\geqq r_{N-4}+r_{N-3}\geqq f_5+f_4=f_6$$

これより, 帰納的に，$r_3\geqq f_{N-2}$，$r_2\geqq f_{N-1}$，$r_1\geqq f_N$となる。

(i)～(iii)より, aがbで割り切れないとき，$r_1\geqq f_N$が成立する。

(3)　$n\geqq 2$のとき, $10f_n<f_{n+5}$が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2,\ 3$のとき　$f_2=1$，$f_3=2$，$f_4=3$，$f_5=5$，$f_6=8$，$f_7=13$，$f_8=21$

$$f_7-10f_2=13-10=3>0,\ f_8-10f_3=21-20=1>0$$

よって，$10f_2<f_7$，$10f_3<f_8$から，$n=2,\ 3$のとき成立する。

(ii)　$n=k-1,\ k$のとき　$10f_{k-1}<f_{k+4}$，$10f_k<f_{k+5}$と仮定すると，

$$10f_{k-1}+10f_k<f_{k+4}+f_{k+5},\ 10f_{k+1}<f_{k+6}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$10f_n < f_{n+5}$ が成立する。

(4)　(2)より，a が b で割り切れないとき，$r_k \geqq f_{N+1-k} > 0\ (1 \leqq k \leqq N-1)$ なので，

$$\frac{1}{r_k} \leqq \frac{1}{f_{N+1-k}}$$

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k} \leqq \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{f_{N+1-k}} = \sum_{l=2}^{N}\frac{1}{f_l} = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{f_k}$ ………①

ここで，(3)より $10f_n < f_{n+5}$ から，$\dfrac{1}{f_{n+5}} < \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{f_n}$ となるのに着目して，

$$s_k = \frac{1}{f_{5k-3}} + \frac{1}{f_{5k-2}} + \frac{1}{f_{5k-1}} + \frac{1}{f_{5k}} + \frac{1}{f_{5k+1}}$$

すると，$s_1 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{259}{120}$ で，$s_{n+1} < \dfrac{1}{10}s_n$ となり，

$$s_n \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} s_1 = \frac{259}{120}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$ （等号は $n=1$ のとき）

そこで，$5M-3 \leqq N \leqq 5M+1$ を満たす自然数 M をとると，

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{f_k} \leqq \sum_{k=1}^{M}s_k \leqq \frac{259}{120}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \frac{259}{120}\cdot\frac{10}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{M}\right\} < \frac{259}{108}$$ ………②

①②より，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$ が成立する。

［解　説］

ユークリッドの互除法と数列の融合問題です。誘導は丁寧についているものの，質，量ともに，かなりハードです。なお，(1)と(2)についてはやや雑という印象が残り，数学的帰納法での証明を付けた方がよかったかもしれません。

2

問題のページへ

(1) O(0, 0, 0) を中心とする半径 r の球面 S_0 に外接し，A(1, 1, 1)，B(1, -1, -1)，C(-1, 1, -1)，D(-1, -1, 1) を中心とする球面をそれぞれ S_A，S_B，S_C，S_D とおく。このとき，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ から，その半径は，いずれも $\sqrt{3}-r\ \ (r<\sqrt{3})$ となる。

さて，S_A と S_B が共有点をもつ条件は，中心間距離が $\mathrm{AB}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ より，

$$2\sqrt{2}\leqq(\sqrt{3}-r)+(\sqrt{3}-r),\ \ r\leqq\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって，r の最大値 r_1 は $r_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ である。

(2) (1)から，$\sqrt{3}-\sqrt{2}\leqq r\leqq 1$ のとき，対称性を考えると，S_A，S_B，S_C，S_D は互いに交わらない。また，S_0 は領域 $Q:|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ に含まれるので，S_0 と Q の共通部分は S_0 である。

さらに，S_A と Q の共通部分は，S_A の中心が A(1, 1, 1) であることより，その体積は S_A の体積の $\dfrac{1}{8}$ 倍となる。S_B，S_C，S_D についても同様である。

これより，S_0，S_A，S_B，S_C，S_D およびそれらの内部の領域の和集合と, Q との共通部分の体積 $V(r)$ は,

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+4\left\{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3}-r)^3\cdot\frac{1}{8}\right\}=\frac{2}{3}\pi\{2r^3+(\sqrt{3}-r)^3\}$$

ここで，$f(r)=2r^3+(\sqrt{3}-r)^3$ とおくと,

$$f'(r)=6r^2-3(\sqrt{3}-r)^2=3(\sqrt{2}r+\sqrt{3}-r)(\sqrt{2}r-\sqrt{3}+r)$$
$$=3\{(\sqrt{2}-1)r+\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+1)r-\sqrt{3}\}$$

すると，$\sqrt{3}-\sqrt{2}\leqq r\leqq 1$ における $f'(r)=0$ の解は,

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

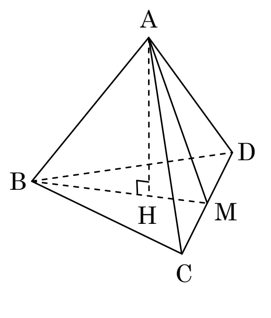
r	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$		$\searrow$		$\nearrow$	

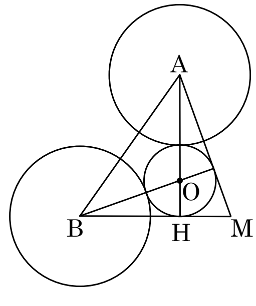
これより，$f(r)$ の増減は右表のようになり，$V(r)$ が最小すなわち $f(r)$ が最小となる r の値 r_2 は $r_2=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ である。

(3) まず，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DB}=2\sqrt{2}$ から，四面体 ABCD は正四面体である。

また, (1)から，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$ なので，O はこの正四面体の外接球の中心となる。すると，O はこの正四面体の内接球の中心でもある。

ここで, 辺 CD の中点を M とし, 3 点 A, B, M を含む平面での断面を考え，さらに A から平面 BCD に垂線を下ろし, この垂線と平面の交点を H とおく。





さて，S_0 が正四面体 ABCD に内接するときの半径 OH を求めておく。まず，H は△BCD の重心になるので，

$$\mathrm{MH}=\frac{1}{3}\mathrm{MB}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

また，$\angle\mathrm{AMH}=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MA}}=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MB}}=\dfrac{1}{3}$

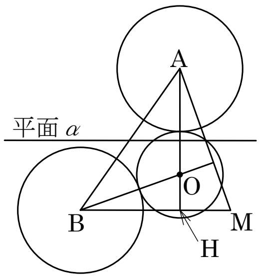
ここで，線分 MO は∠AMH の二等分線であり，

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$\mathrm{OH}=\mathrm{MH}\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，S_0 の半径は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。このとき，S_A，S_B，S_C，S_D の半径は，$\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ となる。

そこで，S_0 と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれかと共有点をもつ r の条件を，r の値で場合分けをして求める。

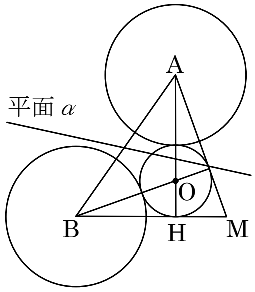
(i)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<r<\sqrt{3}$ のとき



S_0 の半径が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より大，S_A，S_B，S_C，S_D の半径が $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ より小となる。$\mathrm{OH}+r>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，右図のように，S_0 と共有点をもち，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれとも共有点をもたない平面 α が存在する。

よって，この場合は条件にあてはまらない。

(ii)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき



S_0 と共有点をもつ平面 α の法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を単位ベクトルとしておくと，

$$a^2+b^2+c^2=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，$\alpha: ax+by+cz+d=0$ と S_0 が共有点をもつ条件は，S_0 の中心 O と平面 α の距離が半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 以下より，

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

①より，$|d|\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，$d^2\leqq\dfrac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，①②を満たす平面 α が S_B，S_C，S_D と共有点をもたない条件は，これらの球面の半径が $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ から，以下の連立不等式で表せる。

$$\frac{|a-b-c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\,,\ (a-b-c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{|-a+b-c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\,,\ (-a+b-c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots ④$$

$$\frac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\,,\ (-a-b+c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，S_0 と共有点をもつ任意の平面 α が，S_B，S_C，S_D のいずれとも共有点をもたないとき，すなわち①～⑤がすべて成立するとき，平面 α と S_A の位置関係を調べる。そこで，③④⑤の両辺の和をとると，

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>4$$

①より，$3+3d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>4$ となり，

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)<3d^2-1\cdots\cdots\cdots ⑥$$

このとき，半径 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ の球面 S_A の中心 A と平面 α の距離を l_A とおくと，

$$l_A=\frac{|a+b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=|a+b+c+d|$$

そこで，①②⑥を用いると，

$$\begin{aligned}{l_A}^2&=(a+b+c+d)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&<1+d^2+(3d^2-1)=4d^2\leqq\frac{4}{3}\end{aligned}$$

これより，$l_A<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ となり，平面 α と S_A はつねに共有点をもつ。

したがって，対称性を考えると，S_0 と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれかと共有点をもつ。

(i)(ii)より，求める r の最大値 r_3 は，$r_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

［解　説］

球面を題材とした空間図形の問題です。(1)と(2)は基本的です。ところが，(3)は結論を予測して記述しましたが，それでもかなり面倒でした。具体的には，(1)を参考にして「図から」として進めようと思ったのですが，(ii)の場合は雑すぎるのではないかという戸惑いを感じたため書き直し，代数的な処理を試みたものの……。

3

問題のページへ

(1)　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ に対して，

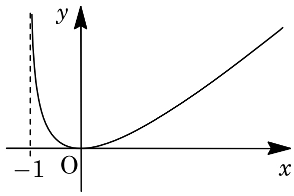
$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\{x-\log(1+x)\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{\log(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\right\}=\infty$$



これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数は，$p<0$ のとき 0 個，$p=0$ のとき 1 個，$p>0$ のとき 2 個である。

(2) (1)より，$y=f(x)$ に対し，$x\geqq 0$ のとき y は $y\geqq 0$ で単調に増加する。このとき，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

さて，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ として，$g(p)=q$ とおくと，$p=f(q)$ であり，

$$g(p)-p=q-f(q)=q-\{q-\log(1+q)\}=\log(1+q)\geqq 0$$

よって，$p\leqq g(p)$ ………①

また，$u>0$ として，$F=\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u-g(p)$ と設定すると，$f(u)=u-\log(1+u)$，$f'(u)=\dfrac{u}{1+u}$ であることより，

$$F=\frac{1}{f'(u)}\{f(q)-f(u)\}+u-q$$

(i)　$q=u$ のとき　$F=\dfrac{1}{f'(u)}\{f(u)-f(u)\}+u-u=0$

(ii)　$q>u$ のとき　平均値の定理より，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(u<c<q)$

ここで，$x>0$ で，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ は正で単調増加より，$f'(c)>f'(u)$ となり，

$$\frac{f(q)-f(u)}{q-u}>f'(u),\quad \frac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(iii)　$q<u$ のとき　(ii)と同様にして，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(q<c<u)$

そして，$f'(c)<f'(u)$ から $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}<f'(u)$ となり，$\dfrac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(i)〜(iii)より，$F\geqq 0$ となり，$g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$ ………②

①②より，$p\leqq g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$

(3)　$p>0$ として，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(p,\ g(p))$ を通り，傾きが 1 の直線 l の方程式は，$q=g(p)$ とおくと，

$$y-q=x-p\ ,\ \ y=x-p+q$$

そして，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形 D の面積を S とする。

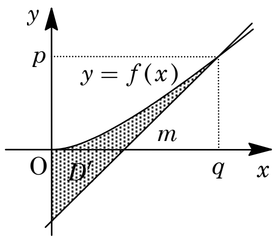
さて，$y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$，$y=x-p+q\Leftrightarrow x=y+p-q$ に注意して，図形 D を直線 $y=x$ に関して対称移動する。

すると，図形 D は直線 $m:y=x+p-q$ と y 軸および曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形に移り，この図形を D' とすると D' の面積も S である。

そこで，曲線 $y=f(x)$ と m の位置関係を考えると，$0\leqq x\leqq q$ で，

$$f(x)-(x+p-q)=f(x)-x-f(q)+q=-\log(1+x)+\log(1+q)\geqq 0$$

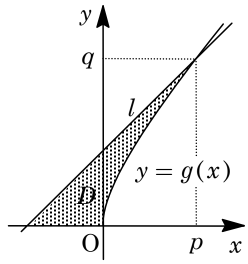
これより，図形 D' および図形 D は右図のようになり，



$$S=\int_0^q\{x-\log(1+x)-(x+p-q)\}dx$$
$$=\int_0^q\{-\log(1+x)-p+q\}dx$$
$$=-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^q+\int_0^q dx-(p-q)q$$
$$=-(1+q)\log(1+q)+q-(p-q)q$$

ここで，$p=f(q)$ より，$p=q-\log(1+q)$ となり，

$$S=-(1+q)(q-p)+q-(p-q)q$$
$$=-q+p-q(q-p)+q-(p-q)q$$
$$=p$$



［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。盛りだくさんです。なお，(2)では，式の形から平均値の定理を利用しましたが，普通に微分しても構いません。また，(3)で l と曲線 $y=g(x)$ の位置関係について，(2)の不等式を利用することもできますが……。