1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+1=0\ \cdots\cdots①,\quad x^2+bx+2=0\ \cdots\cdots②,\quad x^2+cx+3=0\ \cdots\cdots③$$

の解を複素数平面上で考察する。

(1) 2 つの方程式①，②がいずれも実数解をもたないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ。また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 3 つの方程式①，②，③がいずれも実数解をもたず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

$\boxed{2}$　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を 1 組求めよ。

(2)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの, およびその最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式は負の実数解をもたないことを示せ。また，正の実数解を無限個もつことを示せ。

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて a_1，a_2，a_3，$\cdots$ とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間内において，連立不等式 $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1$，$|z| \leqq 6$ により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を l とする。

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り l に垂直な平面を H_t とする。また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ。

(2) l を回転軸にもつ回転体で V に含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

xyz 空間内の 1 辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする。点 X は頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する。X が x 軸, y 軸, z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p, q, r である。ただし，$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$r \geqq 0$，$p+q+r=1$ である。X が n 秒後に頂点 A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする。

(1)　a_{n+2} を a_n，b_n，c_n，d_n と p, q, r を用いて表せ。

(2)　$a_n - b_n + c_n - d_n$ を p, q, r, n を用いて表せ。

(3)　a_n を p, q, r, n を用いて表せ。

1　　問題のページへ

(1)　a, b, cを実数とし，与えらえた方程式に対して，

$$x^2+ax+1=0\cdots\cdots①,\ \ x^2+bx+2=0\cdots\cdots②,\ \ x^2+cx+3=0\cdots\cdots③$$

①②がいずれも実数解をもたないことより，

$$a^2-4<0\cdots\cdots\cdots④,\ \ b^2-8<0\cdots\cdots\cdots⑤$$

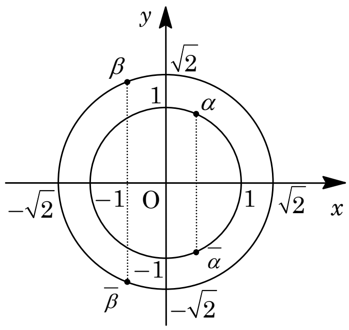
このとき，①の解を$x=\alpha,\ \overline{\alpha}$，②の解を$x=\beta,\ \overline{\beta}$とすると，

$$\alpha+\overline{\alpha}=-a\cdots\cdots\cdots⑥,\ \ \alpha\overline{\alpha}=1\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$\beta+\overline{\beta}=-b\cdots\cdots\cdots⑧,\ \ \beta\overline{\beta}=2\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑦から$|\alpha|^2=1$となり$|\alpha|=1$，また⑨から$|\beta|^2=2$となり$|\beta|=\sqrt{2}$である。

すると，4点α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$は，複素数平面上で，右図のような配置になる。



(i)　$a=b$のとき

⑥⑧より，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}$となり，4点$\alpha$，$\overline{\alpha}$，$\beta$，$\overline{\beta}$の実部はすべて等しくなる。これより，4点はすべて同一直線上にある。

(ii)　$a\neq b$のとき

同一直線上にない3点α，$\overline{\alpha}$，βを通る円の中心は，2点α，$\overline{\alpha}$を結ぶ線分の垂直二等分線すなわち実軸上にある。この中心を点kとおくと，kは実数であり，

$$|\alpha-k|=|\overline{\alpha}-k|=|\beta-k|\cdots\cdots\cdots⑩$$

これより，$|\overline{\alpha}-k|=|\alpha-k|=|\overline{\beta}-k|$となり，点$\overline{\beta}$が3点$\alpha$，$\overline{\alpha}$，$\beta$を通る円周上にあることを表す。すなわち，4点$\alpha$，$\overline{\alpha}$，$\beta$，$\overline{\beta}$はすべて同一円周上にある。

さて，この円の中心kについて，⑩より$(\alpha-k)(\overline{\alpha}-k)=(\beta-k)(\overline{\beta}-k)$となり，

$$\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k+k^2=\beta\overline{\beta}-(\beta+\overline{\beta})k+k^2$$

⑥～⑨を代入すると$1+ak=2+bk$となり，$(a-b)k=1$より，$k=\dfrac{1}{a-b}$

また，この円の半径をrとおくと，$r=|\alpha-k|$となり，

$$r^2=(\alpha-k)(\overline{\alpha}-k)=\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})k+k^2=1+ak+k^2$$

$$=1+\frac{a}{a-b}+\Big(\frac{1}{a-b}\Big)^2=\frac{2a^2-3ab+b^2+1}{(a-b)^2}$$

よって，$r=\dfrac{\sqrt{2a^2-3ab+b^2+1}}{|a-b|}$である。

(2)　③が実数解をもたないことより，$c^2-12<0\cdots\cdots\cdots⑪$

このとき，③の解を$x=\gamma,\ \overline{\gamma}$とすると，

$$\gamma+\overline{\gamma}=-c\cdots\cdots\cdots⑫,\ \ \gamma\overline{\gamma}=3\cdots\cdots\cdots⑬$$

さて，6 点α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$，γ，$\overline{\gamma}$が，すべて同一円周上にあることより，

$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$ ………⑭

さて，2 点γ，$\overline{\gamma}$が中心 k で半径 r の円周上にある条件は，$|\gamma-k|=|\overline{\gamma}-k|$に注意すると，$|\gamma-k|=r$となり，⑫⑬から，

$\gamma\overline{\gamma}-(\gamma+\overline{\gamma})k+k^2=r^2$，$3+ck+k^2=r^2$

(1)の結果を代入すると，$3+\dfrac{c}{a-b}+\left(\dfrac{1}{a-b}\right)^2=\dfrac{2a^2-3ab+b^2+1}{(a-b)^2}$となり，

$3(a-b)^2+c(a-b)+1=(a-b)(2a-b)+1$

$a\neq b$から，$3(a-b)+c=2a-b$となり，$a+c=2b$ ………⑮

以上より，①②③のすべての解が同一円周上にある条件は，④⑤⑪⑭⑮から，

$a^2-4<0$，$b^2-8<0$，$c^2-12<0$，$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$，$a+c=2b$

［解　説］

2 次方程式の解を複素数平面上でとらえる問題です。内容は基本事項の組合せであるものの，ボリュームはかなりのものです。なお，最後の結論で，$b\neq c$，$c\neq a$は明示しなくても構いません。

2

問題のページへ

(1)　整数x，y，zに対して，$35x+91y+65z=3$ ………①

①より，$35x+65z=3-91y$となり，左辺が 5 の倍数なので右辺も 5 の倍数となり，$y=-2$で成立する。このとき，①は,

$$35x+65z=185\,,\ 7x+13z=37\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$7(x-5)+13z=2$と変形すると，②を満たす$(x,\ z)$として，

$$(x-5,\ z)=(4,\ -2)\,,\ (x,\ z)=(9,\ -2)$$

以上より，①を満たす 1 つの整数の組は，$(x,\ y,\ z)=(9,\ -2,\ -2)$となる。

(2)　(1)より，$35\cdot9+91\cdot(-2)+65\cdot(-2)=3$ ………③

①③より，$35(x-9)+91(y+2)+65(z+2)=0$ ………④

④より，$35(x-9)+65(z+2)=-91(y+2)$となり，5 と 91 は互いに素なので，$y+2$が 5 の倍数，すなわちkを整数として，

$$y+2=5k\,,\ y=5k-2$$

このとき，④は，$35(x-9)+91\cdot5k+65(z+2)=0$となり，

$$7(x-9)+7\cdot13k+13(z+2)=0\,,\ 7(x-9)=-13(7k+z+2)$$

すると，7 と 13 は互いに素なので，lを整数として，

$$x-9=13l\,,\ 7k+z+2=-7l$$

よって，$(x,\ z)=(13l+9,\ -7l-7k-2)$となり，①を満たす$(x,\ y,\ z)$は，

$$(x,\ y,\ z)=(13l+9,\ 5k-2,\ -7l-7k-2)$$

このとき，$x^2+y^2=(13l+9)^2+(5k-2)^2$となる。

すると，k, l は整数なので，x^2+y^2は$l=-1$，$k=0$のとき最小となる。すなわち，$(x,\ y,\ z)=(-4,\ -2,\ 5)$のとき最小値$16+4=20$をとる。

［解 説］

不定方程式を解く問題です。x, y, zの係数の特徴に注目して解き進めています。なお, (2)の後半の最小値を求める際に, zは関係しないことより，一般解ではzを複雑な形として記述しています。

3　問題のページへ

(1)　方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ ……①に対して，$f(x)=e^x(1-\sin x)-1$ とおくと，

$$f'(x)=e^x(1-\sin x)-e^x\cos x=e^x(1-\sin x-\cos x)$$
$$=e^x\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

すると，$x+\dfrac{\pi}{4}=2i\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$2i\pi+\dfrac{3}{4}\pi$ (i は整数)，すなわち $x=2i\pi$，$2i\pi+\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f'(x)=0$ となり，$f(x)$ の増減は下表のようになる。

(i)　$x\leqq 0$ のとき

x	$\cdots$	-4π	$\cdots$	$-\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	-2π	$\cdots$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	↗		↘	-1	↗		↘	-1	↗	0

ここで，$f\left(2i\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ で，$i<0$ のとき $f(2i\pi)=e^{2i\pi}-1<0$ から，$x<0$ のとき $f(x)<0$ となり，$f(x)=0$ は実数解をもたない。

(ii)　$x\geqq 0$ のとき

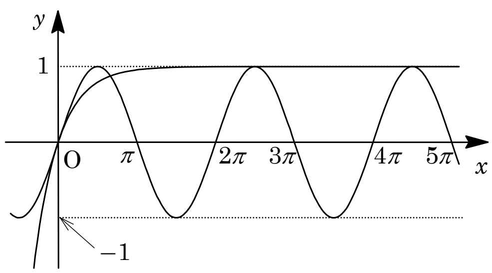
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	2π	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↘	-1	↗		↘	-1	↗		↘

ここで，$f\left(2i\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ で，$i>0$ のとき $f(2i\pi)=e^{2i\pi}-1>0$ から，$x>0$ のとき $f(x)=0$ は無限個の実数解をもつ。

(i)(ii)より，方程式①は負の実数解をもたず，正の実数解を無限個もつ。

(2)　まず，①を変形すると，$1-\sin x=e^{-x}$ から，$\sin x=1-e^{-x}$ となる。

これより，①の実数解は 2 曲線 $y=\sin x$ と $y=1-e^{-x}$ の共有点の x 座標として表せる。そして，①の正の解を小さい方から a_1，a_2，a_3，…とおくと，



$$\frac{\pi}{2}<a_1<\pi,\ 2\pi<a_2<\frac{5}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi<a_3<3\pi,\ 4\pi<a_4<\frac{9}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi<a_5<5\pi$$

すると，l を自然数として，一般的に，

$$\left(2l-\frac{3}{2}\right)\pi<a_{2l-1}<(2l-1)\pi,\ 2l\pi<a_{2l}<\left(2l+\frac{1}{2}\right)\pi\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくとき，m を自然数として，

(i)　$n=2m$ のとき

②より，$\left(4l-\dfrac{3}{2}\right)\pi<a_{2l-1}+a_{2l}<\left(4l-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ となり，

$$\sum_{l=1}^{m}\left(4l-\frac{3}{2}\right)\pi<S_{2m}<\sum_{l=1}^{m}\left(4l-\frac{1}{2}\right)\pi$$

ここで，$\sum_{l=1}^{m}\left(4l-\dfrac{3}{2}\right)\pi=\dfrac{m(4m+1)}{2}\pi=\dfrac{n(2n+1)}{4}\pi$

$$\sum_{l=1}^{m}\left(4l-\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{m(4m+3)}{2}\pi=\frac{n(2n+3)}{4}\pi$$

よって，$\dfrac{n(2n+1)}{4}\pi<S_n<\dfrac{n(2n+3)}{4}\pi$ から，$\dfrac{2n+1}{4n}\pi<\dfrac{S_n}{n^2}<\dfrac{2n+3}{4n}\pi$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{2n+1}{4n}\pi\to\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2n+3}{4n}\pi\to\dfrac{\pi}{2}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$

(ii)　$n=2m-1$ のとき

(i)より，$\dfrac{m(4m+1)}{2}\pi-a_{2m}<S_{2m-1}<\dfrac{m(4m+3)}{2}\pi-a_{2m}$ となり，

$$\frac{(n+1)(2n+3)}{4}\pi-a_{n+1}<S_n<\frac{(n+1)(2n+5)}{4}\pi-a_{n+1}$$

$$\frac{(n+1)(2n+3)}{4n^2}\pi-\frac{a_{n+1}}{n^2}<\frac{S_n}{n^2}<\frac{(n+1)(2n+5)}{4n^2}\pi-\frac{a_{n+1}}{n^2}$$

②から，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{a_{n+1}}{n^2}\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$

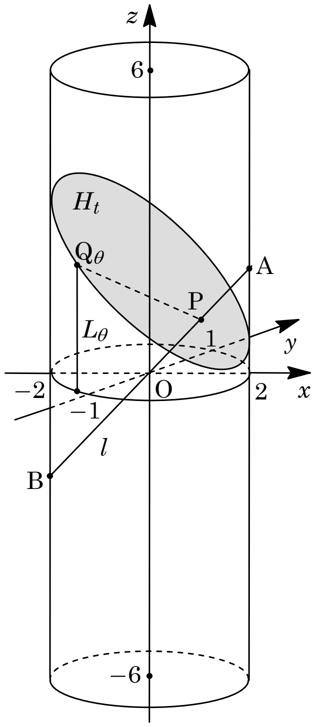
(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$ である。

［解　説］

微分の応用と極限の融合問題です。(1)は与えらえた方程式を $\sin x=1-e^{-x}$ として，$y=\sin x$ と $y=1-e^{-x}$ のグラフの共有点を調べることもできますが，ここでは普通に微分法を利用しています。(2)では上記の 2 つのグラフを参照して解の値を評価しました。なお，n を偶奇に分けて示しましたが，等差数列の和は 2 次式ということを考えれば，もっとアバウトに処理するのも可能です。

4

問題のページへ



(1) xyz 空間内において，$V:\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1$，$|z|\leqq 6$ ……①

また，2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線 l は原点を通り，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とすると，$\vec{u}=(1,\ 0,\ 1)$ となる。

さて，平面 H_t は，線分 AB 上の点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ $(|t|\leqq 2\sqrt{2})$ を通り，l に垂直すなわち法線ベクトルが $\vec{u}$ であることより，その方程式は，

$$\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+\left(z-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=0,\ x+z=\sqrt{2}t \cdots\cdots\cdots ②$$

xy 平面上で楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線 L_θ は，

$$x=2\cos\theta,\ y=\sin\theta \cdots\cdots\cdots ③$$

そこで，L_θ と H_t との交点 Q_θ は②③を連立して，

$$2\cos\theta+z=\sqrt{2}t,\ z=\sqrt{2}t-2\cos\theta$$

(2) (1)より，$|z|=\left|\sqrt{2}t-2\cos\theta\right|\leqq\sqrt{2}|t|+2|\cos\theta|\leqq 6$ となり，点 Q_θ は V に含まれている。

また，$\mathrm{Q}_\theta(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ \sqrt{2}t-2\cos\theta)$ から，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_\theta{}^2&=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\sin^2\theta+\left(\sqrt{2}t-2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1-\cos^2\theta+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)^2\\&=7\cos^2\theta-4\sqrt{2}t\cos\theta+t^2+1=7\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2-\frac{1}{7}t^2+1 \cdots\cdots\cdots ④\end{aligned}$$

ここで，$\cos\theta$ は $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ を満たす任意の実数である。すると，平面 H_t 上で，点 P_t を中心とする半径 r_t の円が，領域 V による切り口に含まれる条件は，r_t が $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_\theta$ の最小値以下である。そして，xy 平面についての対称性から，$0\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$ において考えると，④より，

(i) $\dfrac{2\sqrt{2}}{7}t\leqq 1\left(0\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\sqrt{2}\right)$ のとき　$r_t{}^2\leqq -\dfrac{1}{7}t^2+1$

(ii) $1\leqq\dfrac{2\sqrt{2}}{7}t\left(\dfrac{7}{4}\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}\right)$ のとき　$r_t{}^2\leqq 7-4\sqrt{2}t+t^2+1=(t-2\sqrt{2})^2$

これより，V に含まれる l を回転軸にもつ回転体で，しかも体積が最大となるものは，平面 H_t 上にある回転体の切り口の円の半径が，(i)，(ii)のそれぞれの場合で，r_t の最大値として表せる。

そこで，この求める回転体の体積を W とおくと，$\mathrm{OP}_t = t$ から，

$$W = 2\left\{ \pi\int_0^{\frac{7}{4}\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{7}t^2+1\right)dt + \pi\int_{\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (t-2\sqrt{2})^2 dt \right\}$$

$$= 2\pi\left[-\frac{t^3}{21}+t\right]_0^{\frac{7}{4}\sqrt{2}} + 2\pi\left[\frac{1}{3}(t-2\sqrt{2})^3\right]_{\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{2}{21}\left(\frac{7}{4}\sqrt{2}\right)^3\pi + \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^3\pi$$

$$= -\frac{49}{48}\sqrt{2}\pi + \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi + \frac{1}{48}\sqrt{2}\pi = \frac{5}{2}\sqrt{2}\pi$$

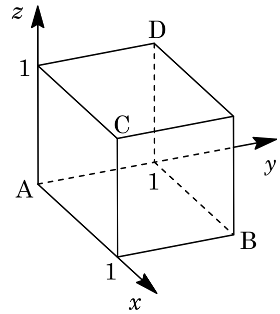
［解　説］

斜回転体の体積を求める問題ですが，楕円柱に含まれる最大のものという味付けが施されています。問題文の設定や(1)の設問はそのための誘導となっているものの，これだけではなかなかというレベルです。

5

問題のページへ

(1) A$(0,\ 0,\ 0)$, B$(1,\ 1,\ 0)$, C$(1,\ 0,\ 1)$, D$(0,\ 1,\ 1)$に対し, A から出発した点 X が, 立方体 Q の辺上を進む。そして, x 軸, y 軸, z 軸に平行に進む確率がそれぞれ $p,\ q,\ r$ のとき, $n+2$ 秒後に X が A にあるのは,



(a) n 秒後に点 A のとき

A→$(1,\ 0,\ 0)$→A, A→$(0,\ 1,\ 0)$→A, A→$(0,\ 0,\ 1)$→A の場合があり, その確率はそれぞれ p^2, q^2, r^2 である。

(b) n 秒後に点 B のとき

B→$(1,\ 0,\ 0)$→A, B→$(0,\ 1,\ 0)$→A の場合があり, その確率はともに pq である。

(c) n 秒後に点 C のとき

C→$(1,\ 0,\ 0)$→A, C→$(0,\ 0,\ 1)$→A の場合があり, その確率はともに rp である。

(d) n 秒後に点 D のとき

D→$(0,\ 1,\ 0)$→A, D→$(0,\ 0,\ 1)$→A の場合があり, その確率はともに qr である。

(a)～(d)より, X が n 秒後に A, B, C, D にある確率 a_n, b_n, c_n, d_n について,

$$a_{n+2}=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2rpc_n+2qrd_n$$

ここで, $p+q+r=1$ から, $p^2+q^2+r^2=1^2-2pq-2qr-2rp$ となり,

$$a_{n+2}=(1-2pq-2qr-2rp)a_n+2pqb_n+2rpc_n+2qrd_n \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) (1)と同様に考えると, $n+2$ 秒後に X が B, C, D にあるとき,

$$b_{n+2}=2pqa_n+(1-2pq-2qr-2rp)b_n+2qrc_n+2rpd_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$c_{n+2}=2rpa_n+2qrb_n+(1-2pq-2qr-2rp)c_n+2pqd_n \cdots\cdots\cdots ③$$

$$d_{n+2}=2qra_n+2rpb_n+2pqc_n+(1-2pq-2qr-2rp)d_n \cdots\cdots\cdots ④$$

①－②＋③－④より,

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}=(1-4pq-4qr)(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

ここで, $1-4pq-4qr=1-4q(p+r)=1-4q(1-q)=(1-2q)^2$ となり,

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}=(1-2q)^2(a_n-b_n+c_n-d_n) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて, $(a_0,\ b_0,\ c_0,\ d_0)=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$から,

(i) n が奇数のとき

⑤より, $a_1-b_1+c_1-d_1=0$ なので, $a_n-b_n+c_n-d_n=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$

(ii) n が偶数のとき

⑤より, $a_n-b_n+c_n-d_n=(a_0-b_0+c_0-d_0)\{(1-2q)^2\}^{\frac{n}{2}}=(1-2q)^n \cdots\cdots\cdots ⑦$

(3) (2)と同様にして, まず①＋②＋③＋④より,

$$a_{n+2}+b_{n+2}+c_{n+2}+d_{n+2}=a_n+b_n+c_n+d_n$$

(i)　n が奇数のとき　$a_n+b_n+c_n+d_n=0$ ………⑧

(ii)　n が偶数のとき　$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ ………⑨

次に，①＋②－③－④より，

$$a_{n+2}+b_{n+2}-c_{n+2}-d_{n+2}=(1-2r)^2(a_n+b_n-c_n-d_n)$$

(i)　n が奇数のとき　$a_n+b_n-c_n-d_n=0$ ………⑩

(ii)　n が偶数のとき　$a_n+b_n-c_n-d_n=(1-2r)^n$ ………⑪

さらに，①－②－③＋④より，

$$a_{n+2}-b_{n+2}-c_{n+2}+d_{n+2}=(1-2p)^2(a_n-b_n-c_n+d_n)$$

(i)　n が奇数のとき　$a_n-b_n-c_n+d_n=0$ ………⑫

(ii)　n が偶数のとき　$a_n-b_n-c_n+d_n=(1-2p)^n$ ………⑬

以上の結果をまとめ，n を偶奇に分けて記すと，

(I)　n が奇数のとき

⑥⑧から $a_n+c_n=0$，⑩⑫から $a_n-c_n=0$ となり，$a_n=0$

(II)　n が偶数のとき

⑦⑨から $2a_n+2c_n=1+(1-2q)^n$，⑪⑬から $2a_n-2c_n=(1-2r)^n+(1-2p)^n$

$$a_n=\frac{1}{4}\{1+(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n\}$$

［解　説］

確率と漸化式についての問題です。量的にはかなりのものですが，誘導がついているため，内容的には標準レベルです。