1　解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。n 以下の自然数 k について，k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k=1$，5 または 6 の目が出たら $a_k=0$ として，数列 $\{a_n\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_n\}$ を，$b_1=0$，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　k を 2 以上 n 以下の自然数とする。$b_k=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　n が 5 以上のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{15}{16}$ となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。また a，b，c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2,\ C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線 $l : y = b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2)　b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4)　$b = y_0$ として，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1 = V_2$ のとき，a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　各項が 0 または 1 である数列$\{a_n\}$に対して，条件より，$a_k=1$となる確率は$\dfrac{2}{3}$，$a_k=0$となる確率は$\dfrac{1}{3}$である。そして，この$\{a_n\}$より数列$\{b_n\}$を定義すると，

$$b_1=0,\ b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})\ (2\leqq k\leqq n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$2\leqq k\leqq n$のとき，a_k+a_{k-1}の値は$0, 1, 2$のいずれかとなり，

(i)　$a_k+a_{k-1}=0$のとき　$(*)$から$b_k=0$

$(a_{k-1},\ a_k)=(0,\ 0)$の場合で，この確率は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$である。

(ii)　$a_k+a_{k-1}=1$のとき　$(*)$から$b_k=1$

$(a_{k-1},\ a_k)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$の場合で，この確率は$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$である。

(iii)　$a_k+a_{k-1}=2$のとき　$(*)$から$b_k=0$

$(a_{k-1},\ a_k)=(1,\ 1)$の場合で，この確率は$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$である。

さて，$b_k=0\ (2\leqq k\leqq n)$となるのは，(i)と(iii)のときなので，この確率は，

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

(2)　$b_k=1$となるのは(1)の(ii)の場合であり，これより$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$となるのは，2 以上のnを偶奇に分けて考えると，mを自然数として

(a)　n が偶数 $(n=2m)$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{2m-1},\ a_{2m})$の組が，$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ 1)$の場合で，このときの確率は，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^m+\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^m=2\left(\frac{2}{9}\right)^m=2\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$$

(b)　n が奇数 $(n=2m+1)$ のとき　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{2m},\ a_{2m+1})$の組が，$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 0)$の場合で，このときの確率は，

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^m\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^m\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{9}\right)^m=\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

(3)　$n\geqq 5$のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\dfrac{b_4}{2^3}+\dfrac{b_5}{2^4}+\dfrac{b_6}{2^5}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$とおくと，$n\geqq 6$では，

$$0\leqq\frac{b_6}{2^5}+\cdots+\frac{b_n}{2^{n-1}}\leqq\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\right\}\cdot\frac{2}{1}<\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

さて，$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$のとき$S_5=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{0}{2^4}=\dfrac{5}{8}$となり，また$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$のとき$S_5=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{15}{16}$となることに注意すると，$\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{15}{16}$であるためには，$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)$の組が，

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

(i)　$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$ のとき　$S_5=\dfrac{5}{8}$ から $\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{11}{16}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$ より，この確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{3^5}+\frac{4}{3^5}=\frac{4}{81}$$

(ii)　$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 1)$ のとき　$S_5=\dfrac{11}{16}$ から $\dfrac{11}{16}\leqq S_n<\dfrac{11}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{12}{16}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$ より，この確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{3^5}+\frac{8}{3^5}=\frac{4}{81}$$

(iii)　$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$ のとき　$S_5=\dfrac{3}{4}$ から $\dfrac{3}{4}\leqq S_n<\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{13}{16}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ より，この確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{3^5}+\frac{2}{3^5}=\frac{6}{81}$$

(iv)　$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 1,\ 0,\ 1)$ のとき　$S_5=\dfrac{13}{16}$ から $\dfrac{13}{16}\leqq S_n<\dfrac{13}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{14}{16}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$ より，この確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{3^5}+\frac{4}{3^5}=\frac{4}{81}$$

(v)　$(b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 0)$ のとき　$S_5=\dfrac{7}{8}$ から $\dfrac{7}{8}\leqq S_n<\dfrac{7}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ より，この確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{3^5}+\frac{8}{3^5}=\frac{4}{81}$$

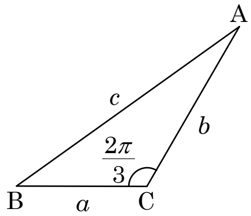
(i)～(v)より，求める $\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{15}{16}$ となる確率は,

$$\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{6}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{22}{81}$$

［解 説］

数列と確率の融合問題です。具体的に考えて方針を立てていきました。なお，(3)はS_nを2進数表示で記述した方が，クリアな解答例になったかも……。

2　　問題のページへ



(1)　△ABC において, a, b, c がこの順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすので,

$$2b = a + c \cdots\cdots ①,\quad a \leqq b \leqq c \cdots\cdots ②$$

ここで, $C = \dfrac{2\pi}{3}$ から, 余弦定理を利用して,

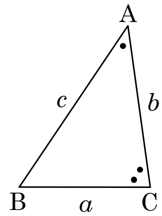
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{2\pi}{3},\quad c^2 = a^2 + b^2 + ab \cdots\cdots\cdots ③$$

①③から, $(2b-a)^2 = a^2 + b^2 + ab$ となり,

$$4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + b^2 + ab,\quad b(3b - 5a) = 0$$

すると, $b = \dfrac{5}{3}a$, $c = 2\cdot\dfrac{5}{3}a - a = \dfrac{7}{3}a$ から, $a = 3k\ (k > 0)$ とおくと, $b = 5k$, $c = 7k$ となり, ②および $c < a + b$ を満たしており,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 49 - 9}{2\cdot5\cdot7} = \frac{13}{14}$$



(2)　$C = 2A$ のとき, $A < C$ より $a < c$ となるので, ②を満たし, $B = \pi - A - 2A = \pi - 3A > 0$ から $0 < A < \dfrac{\pi}{3}$ ·········④

すると, 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin(\pi - 3A)} = \dfrac{c}{\sin 2A} = 2R$ となり,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 3A} = \frac{c}{\sin 2A} = 2R$$

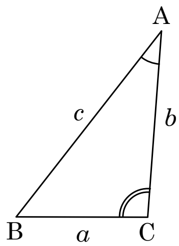
①に代入すると, $2\sin 3A = \sin A + \sin 2A$ から,

$$2(3\sin A - 4\sin^3 A) = \sin A + 2\sin A\cos A$$

$\sin A > 0$ から, $6 - 8\sin^2 A = 1 + 2\cos A$ となり, $5 - 8(1 - \cos^2 A) = 2\cos A$

$$8\cos^2 A - 2\cos A - 3 = 0,\quad (2\cos A + 1)(4\cos A - 3) = 0$$

④から $\dfrac{1}{2} < \cos A < 1$ なので, $\cos A = \dfrac{3}{4}$ である。



(3)　$C = A + \dfrac{\pi}{3}$ のとき, $A < C$ より $a < c$ となるので, ②を満たし,

$$B = \pi - A - \left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - 2A > 0 \text{ から } 0 < A < \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(2)と同様にして, ①から $2\sin B = \sin A + \sin C$ となり,

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2A\right) = \sin A + \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$$

展開すると, $\sqrt{3}\cos 2A + \sin 2A = \dfrac{3}{2}\sin A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より,

$$2\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$$

すると，⑤から $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$ なので，

$$4\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A-2\sin A=\sqrt{3}$ から，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$ となる。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると，$\dfrac{3}{4}(4\cos^2 A-4\cos A+1)+\cos^2 A=1$ から，

$$16\cos^2 A-12\cos A-1=0$$

⑤から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{6+\sqrt{52}}{16}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$ である。

［解　説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが，(3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

3　　問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^4 - x^2$ ……①，$C_2 : y = a(x^2 - 1)$ ……②，$l : y = b$ ……③に対し，①と②を連立すると，$x^4 - x^2 = a(x^2 - 1)$ となり，

$$x^2(x+1)(x-1) = a(x+1)(x-1),\ (x+1)(x-1)(x^2 - a) = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，C_1 と C_2 が $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつ条件は，

(i)　$a = 0$ のとき　④の実数解は $x = 0,\ \pm 1$ より不適。

(ii)　$a < 0$ のとき　④の実数解は $x = \pm 1$ より不適。

(iii)　$a > 0$ のとき　④の実数解は $x = \pm 1,\ \pm\sqrt{a}$ となり，$0 < \sqrt{a} < 1$ から $0 < a < 1$

(i)〜(iii)より，求める条件は $0 < a < 1$ であり，このとき $(x_0,\ y_0) = (\sqrt{a},\ a^2 - a)$

(2)　①は偶関数なので，C_1 は y 軸対称になり，

$$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

すると，$x \geqq 0$ での増減は右表のようになり，$x < 0$ の範囲も合わせて考えると，C_1 と l が相異なる 4 点で交わる条件は，$-\dfrac{1}{4} < b < 0$ である。

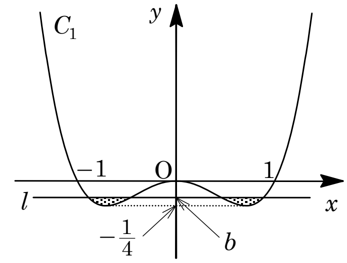
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	0	$-$	0	$+$
y	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

このとき，C_1 と l の交点の x 座標は，①と③を連立して，$x^4 - x^2 = b$ より，

$$x^4 - x^2 - b = 0,\ x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}$$

よって，$x = \sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}}$ となる。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，$y = t$ $\left(-\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq b\right)$ における断面積は，(2)を利用して，

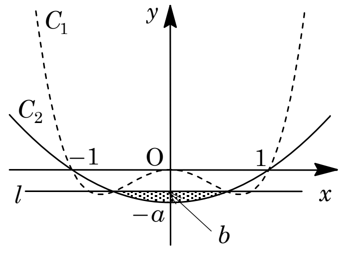


$$\pi\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} - \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right) = \pi\sqrt{1+4t}$$

これより，この立体の体積 V_1 は，

$$V_1 = \pi\int_{-\frac{1}{4}}^{b} \sqrt{1+4t}\,dt = \pi\left[\frac{2}{3}(1+4t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4}\right]_{-\frac{1}{4}}^{b} = \frac{\pi}{6}(1+4b)^{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(4)　$b = y_0 = a^2 - a$ のとき，C_2 と $y = t$ との交点の x 座標は，②より $a(x^2 - 1) = t$ となり，



$$x^2 = \frac{t+a}{a},\ x = \pm\sqrt{\frac{t+a}{a}}$$

すると，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，$y = t\ (-a \leqq t \leqq b)$ における断面積は $\pi \cdot \dfrac{t+a}{a}$ となるので，この立体の体積 V_2 は，

$$V_2=\pi\int_{-a}^{b}\frac{t+a}{a}dt=\frac{\pi}{a}\Big[\,\frac{1}{2}(t+a)^2\,\Big]_{-a}^{b}=\frac{\pi}{2a}(b+a)^2\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$b=a^2-a$ を代入すると，⑤⑥より，

$$V_1=\frac{\pi}{6}(1+4a^2-4a)^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{6}\{(2a-1)^2\}^{\frac{3}{2}}，\ V_2=\frac{\pi}{2a}(a^2-a+a)^2=\frac{\pi}{2}a^3$$

さて，条件より，$3V_1=V_2$ なので，

(i)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$3\cdot\dfrac{\pi}{6}(1-2a)^3=\dfrac{\pi}{2}a^3$ より $1-2a=a$ となり，$a=\dfrac{1}{3}$ で適する。

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

$3\cdot\dfrac{\pi}{6}(2a-1)^3=\dfrac{\pi}{2}a^3$ より $2a-1=a$ となり，$a=1$ で適さない。

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=\dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

回転体の体積を求める問題です。ただ，与えられた曲線がどちらも y 軸対称であるため，複雑な構図ではありません。なお，最後の詰めは要注意です。