1

解答解説のページへ

(1)　$h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ $l,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。

2

解答解説のページへ

次の等式が$1 \leqq x \leqq 2$で成り立つような関数$f(x)$と定数$A,\ B$を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$は$1 \leqq x \leqq 2$に対して定義される連続関数とする。

3

解答解説のページへ

i を虚数単位とする。実部と虚部がともに整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする。

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする。このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ。

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 z, w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$ ， $L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$ ， $L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$ ， $L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$ ， $L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$ ， $L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

H_1, $\cdots$, H_n を空間内の相異なる n 枚の平面とする。H_1, $\cdots$, H_n によって空間が $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする。例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=8$
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3)=6$
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4)=15$

である。

(1)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ。

(2)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。ただし，$n\geqq 2$ とする。

(3)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。ただし，$n\geqq 3$ とする。

5

解答解説のページへ

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列 $b_k=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。

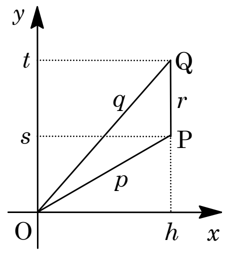
(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ。

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$h>0$，$s<t$ のとき，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(h,\ s)$，$\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対し，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$\mathrm{PQ}=r$ とすると，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S は，



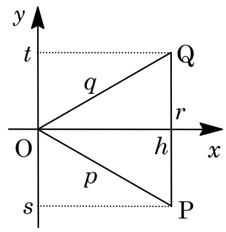
$$S=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}(t-s)h$$

このとき，$A=p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$ とおくと，

$$A=(h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-2\sqrt{3}(t-s)h$$
$$=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2t^2+2s^2-2ts$$
$$=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2t^2+2s^2-2ts$$
$$=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}s^2+ts=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(t+s)^2$$

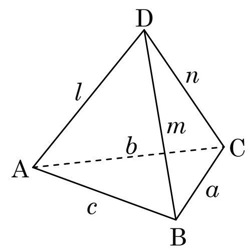
すると，$A\geqq 0$ すなわち $p^2+q^2+r^2\geqq 4\sqrt{3}S$ が成立する。

また，等号が成立するのは，$h=\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ かつ $t+s=0$ のときで，まとめると，$s=-\frac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\frac{h}{\sqrt{3}}$ である。



このとき，$p=q=r=\frac{2}{\sqrt{3}}h$ となることより，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形である。

(2) 四面体 ABCD に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AD}=l$，$\mathrm{BD}=m$，$\mathrm{CD}=n$ とし，さらに $S_1=\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\triangle\mathrm{DAB}$，$S_3=\triangle\mathrm{DBC}$，$S_4=\triangle\mathrm{DCA}$ とおくと，(1)から，



$$a^2+b^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_1\quad(\text{等号は}\,a=b=c\,\text{のとき})$$
$$l^2+m^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}S_2\quad(\text{等号は}\,l=m=c\,\text{のとき})$$
$$m^2+n^2+a^2\geqq 4\sqrt{3}S_3\quad(\text{等号は}\,m=n=a\,\text{のとき})$$
$$n^2+l^2+b^2\geqq 4\sqrt{3}S_4\quad(\text{等号は}\,n=l=c\,\text{のとき})$$

この 4 つの不等式の各辺の和をとると，

$$2a^2+2b^2+2c^2+2l^2+2m^2+2n^2\geqq 4\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

そこで，四面体 ABCD の表面積を T とすると，$T=S_1+S_2+S_3+S_4$ から，

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\geqq 2\sqrt{3}T$$

また，等号がが成立するのは，$a=b=c=l=m=n$ のときで，このとき四面体 ABCD は正四面体である。

［解　説］

四面体を対象にした計量問題です。(1)の誘導が(2)の証明へとスムーズにつながっています。

2

問題のページへ

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$ ………①

ここで，$xy = t$ とおくと $x\,dy = dt$ となり，$y = \dfrac{1}{x} \to \dfrac{2}{x}$ は $t = 1 \to 2$ に対応し，

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t)\cdot\frac{1}{x}dt = \frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x| f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t - \log x) f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t - \log x) f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t) f(t)\,dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t) f(t)\,dt - \frac{\log x}{x}\int_x^2 f(t)\,dt$$

①の両辺を x 倍すると，$x\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$ となり，

$$-\int_1^x (\log t) f(t)\,dt + (\log x)\int_1^x f(t)\,dt + \int_x^2 (\log t) f(t)\,dt - (\log x)\int_x^2 f(t)\,dt$$
$$= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \text{ ………②}$$

ここで，②の左辺を $F(x)$，右辺を $G(x)$ とおくと，

$$F'(x) = -(\log x) f(x) + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt + (\log x) f(x) - (\log x) f(x)$$
$$-\frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt + (\log x) f(x)$$
$$= \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt$$

$$G'(x) = 6x(\log x - 1) + 3x^2\cdot\frac{1}{x} + A = 6x\log x - 3x + A$$

すると，$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt = 6x\log x - 3x + A$ から，両辺を x 倍すると，

$$\int_1^x f(t)\,dt - \int_x^2 f(t)\,dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \text{ ………③}$$

さらに，③の両辺を x で微分して，

$$f(x) + f(x) = 12x\log x + 6x^2\cdot\frac{1}{x} - 6x + A$$

$$f(x) = 6x\log x + \frac{A}{2} \text{ ………④}$$

さて，②に $x = 1$ を代入すると，$\displaystyle\int_1^2 (\log t) f(t)\,dt = -3 + A + B$ ………⑤

また，③に $x = 1$ を代入すると，$-\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = -3 + A$

$$3 - A = \int_1^2 f(t)\,dt \text{ ………⑥}$$

④を⑥に代入して,

$$3-A=\int_1^2\left(6t\log t+\frac{A}{2}\right)dt=\left[\,3t^2\log t\,\right]_1^2-\int_1^2 3t\,dt+\frac{A}{2}(2-1)$$

$$=12\log 2-\frac{3}{2}(2^2-1^2)+\frac{A}{2}=12\log 2-\frac{9}{2}+\frac{A}{2}$$

よって, $\dfrac{3}{2}A=\dfrac{15}{2}-12\log 2$ より, $A=5-8\log 2$ となり, ④から,

$$f(x)=6x\log x+\frac{5}{2}-4\log 2$$

⑤に代入して, $\displaystyle\int_1^2(\log t)f(t)\,dt=-3+(5-8\log 2)+B$ となり,

$$B=\int_1^2(\log t)\left(6t\log t+\frac{5}{2}-4\log 2\right)dt-2+8\log 2$$

$$=6\int_1^2 t(\log t)^2dt+\left(\frac{5}{2}-4\log 2\right)\int_1^2\log t\,dt-2+8\log 2$$

ここで, $\displaystyle\int_1^2\log t\,dt=\left[\,t\log t-t\,\right]_1^2=2\log 2-1$

$$\int_1^2 t(\log t)^2dt=\left[\,\frac{t^2}{2}(\log t)^2\,\right]_1^2-\int_1^2\frac{t^2}{2}\cdot 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=2(\log 2)^2-\int_1^2 t\log t\,dt=2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}$$

以上, まとめると,

$$B=6\left\{2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}\right\}+\left(\frac{5}{2}-4\log 2\right)(2\log 2-1)-2+8\log 2$$

$$=12(\log 2)^2-12\log 2+\frac{9}{2}-8(\log 2)^2+9\log 2-\frac{5}{2}-2+8\log 2$$

$$=4(\log 2)^2+5\log 2$$

［解　説］

いわゆる微分型と呼ばれるタイプの積分方程式です。解の構図は, 微分して初期条件を求めることを 2 回くり返すという定型的なものです。それ以外のポイントとしては, 分数関数は微分すると一般的に複雑になるので, その前に両辺を x 倍するというぐらいです。それでも, 計算量は半端ではありませんが。

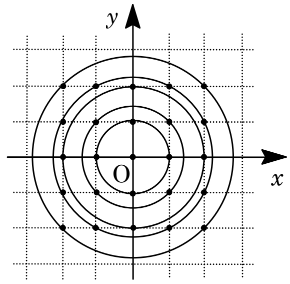
3

問題のページへ

(1)　実部と虚部がともに整数である複素数 z に対して，$w=\dfrac{z}{3+2i}$ ……(＊)とおくと，

$$|w|=\frac{|z|}{|3+2i|}=\frac{|z|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|z|}{\sqrt{13}}$$

ここで，$|w|\leqq r$ となる w の個数を $N(r)$ とおくとき，$10\leqq N(r)<25$ である場合を，$|z|$ の小さい方から，右図を参照して調べていくと，



(i)　$|z|=0\ (z=0)$ のとき　$|w|=0$

(ii)　$|z|=1\ (z=\pm1,\ \pm i)$ のとき　$|w|=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

(iii)　$|z|=\sqrt{2}\ (z=1\pm i,\ -1\pm i)$ のとき　$|w|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$

(iv)　$|z|=2\ (z=\pm2,\ \pm2i)$ のとき　$|w|=\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$

(v)　$|z|=\sqrt{5}\ (z=1\pm2i,\ -1\pm2i,\ 2\pm i,\ -2\pm i)$ のとき　$|w|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{65}}{13}$

(vi)　$|z|=2\sqrt{2}\ (z=2\pm2i,\ -2\pm2i)$ のとき　$|w|=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{13}\sqrt{26}$

(i)～(vi)より，$r<\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ のとき $N(r)=1$

$\dfrac{\sqrt{13}}{13}\leqq r<\dfrac{\sqrt{26}}{13}$ のとき $N(r)=1+4=5$

$\dfrac{\sqrt{26}}{13}\leqq r<\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$ のとき $N(r)=5+4=9$

$\dfrac{2}{13}\sqrt{13}\leqq r<\dfrac{\sqrt{65}}{13}$ のとき $N(r)=9+4=13$

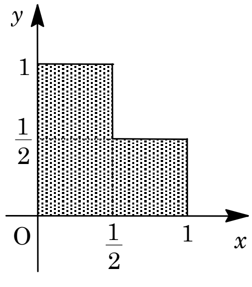
$\dfrac{\sqrt{65}}{13}\leqq r<\dfrac{2}{13}\sqrt{26}$ のとき $N(r)=13+8=21$

$r\geqq\dfrac{2}{13}\sqrt{26}$ のとき $N(r)\geqq21+4=25$

以上より，$10\leqq N(r)<25$ となるのは，$\dfrac{2}{13}\sqrt{13}\leqq r<\dfrac{2}{13}\sqrt{26}$ から，

$$\{r\,|\,10\leqq N(r)<25\}=\left\{r\ \middle|\ \frac{2}{13}\sqrt{13}\leqq r<\frac{2}{13}\sqrt{26}\right\}$$

(2)　6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界は右図の網点部となり，これを領域 D とする。



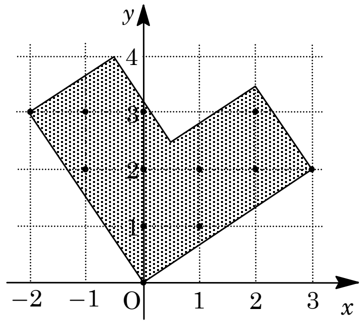
さて，(＊)から $z=(3+2i)w$ なので，

$$|z| = |3+2i||w| = \sqrt{13}|w|$$

$$\arg z = \arg(3+2i) + \arg w = \alpha + \arg w \quad (\alpha = \arg(3+2i))$$

すると, w が領域 D に存在するとき, z は D を原点まわりに α だけ回転し, さらに原点を中心に $\sqrt{13}$ 倍だけ相似拡大した領域に属し, これを領域 E とする。

ここで, $w=0 \to z=0$, $w=1 \to z=3+2i$, $w=1+\dfrac{i}{2} \to z=2+\dfrac{7}{2}i$, $w=\dfrac{1+i}{2} \to z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$, $w=\dfrac{1}{2}+i \to z=-\dfrac{1}{2}+4i$, $w=i \to z=-2+3i$ に注意すると, 領域 E は右図の網点部となる。ただし, 境界は含む。



すると, 領域 E に含まれる実部と虚部がともに整数である複素数 z を列挙すると,

$$0,\ i,\ 1+i,\ 2i,\ \pm 1+2i,\ 2+2i,\ 3+2i,\ 3i,\ -1+3i,\ \pm 2+3i$$

以上より, 求める M の要素の個数は 12 となる。

［解 説］

複素数平面上の変換についての問題です。丁寧に処理をすることが重要です。なお, (2)については, 初め(1)のプロセスを誘導にしようと考え計算を進めましたが, あまりにも大変なので, 方針を転換し, 逆変換を利用して解いています。

4　問題のページへ

(1)　まず, 平面上の直線が「どの 2 本も平行でなく, どの 3 本も 1 点で交わらない」という配置を(A)とする。

また, 空間内の平面が「どの 2 枚も平行でなく, どの平面も他の 2 枚の交線に平行だったり, 交線を含んだりしない」という配置を(B)とする。

さて, 平面上に配置(A)を満たす n 本の直線があり, このときの平面の分割数を a_n とおく。そこに, 配置(A)を満たすように $n+1$ 本目の直線を引くと, この直線と n 本の直線との交点が n 個生じることより, 平面の分割数は $n+1$ だけ増えるので,

$$a_{n+1}=a_n+n+1$$

すると, $a_1=2$ で, $n\geqq 2$ のとき,

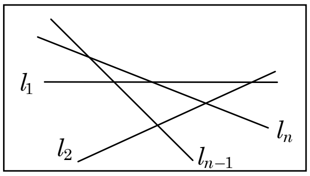
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{1}{2}(2+n)(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

なお, この式は $n=1$ のときも成立する。

また, 空間内に配置(B)を満たす n 枚の平面 H_1, …, H_n があり, このときの空間の分割数を b_n とおく。すると, b_n は $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとり得る値のうち最も大きいものになる。

そこに, 配置(B)を満たすように $n+1$ 枚目の平面 H_{n+1} を置くと, H_{n+1} 上には, H_{n+1} と平面 H_1, …, H_n との交線 l_1, …, l_n が配置(A)を満たすように引かれているので, これより空間の分割数は a_n だけ増え,

［平面 H_{n+1} 上］



$$b_{n+1}=b_n+a_n=b_n+\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

すると, $b_1=2$ で, $n\geqq 2$ のとき,

$$b_n=b_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k+2)=2+\frac{1}{12}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{4}(3+n+1)(n-1)$$

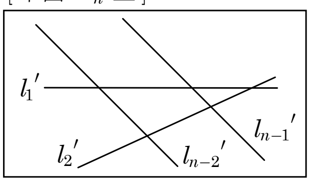
$$=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)\cdots\cdots\cdots①$$

なお, ①は $n=1$ のときも成立している。

(2)　$n\geqq 3$ のとき, 空間内に配置(B)を満たす $n-1$ 枚の平面 H_1, …, H_{n-1} がある。

そこに, n 枚目の平面 H_n を置き, H_n と平面 H_1, …, H_{n-1} との交線 l_1', …, l_{n-1}' について, $l_{n-2}' /\!/ l_{n-1}'$ を満たすようにする。このときの空間の分割数を c_n とおく。

［平面 H_n 上］



すると, H_n 上で, l_1', …, l_{n-2}' は平面を a_{n-2} 個に分割し, l_{n-1}' は l_1', …, l_{n-3}' との交点が $n-3$ 個あるので, 平面の分割数は $n-2$ だけ増えることにより,

$$c_n = b_{n-1} + a_{n-2} + n - 2$$
$$= \frac{1}{6}\{(n-1)^3 + 5(n-1) + 6\} + \frac{1}{2}\{(n-2)^2 + (n-2) + 2\} + n - 2$$
$$= \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 8n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n) \cdots\cdots\cdots ②$$

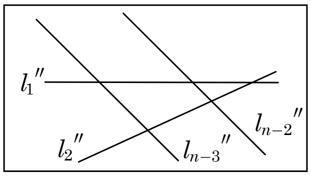
これより，$c_n = b_n - 1$ となるので，c_n は $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとり得る値のうち 2 番目に大きいものになる。

また，$n = 2$ のとき，①から $b_2 = 4$ であるが，ここで平行な 2 平面を設定すると $T(H_1,\ H_2) = 3$ となるので，このときも②は成立する。

(3)　$n \geqq 5$ のとき，空間内に配置(B)を満たす $n-2$ 枚の平面 H_1，…，H_{n-2} がある。

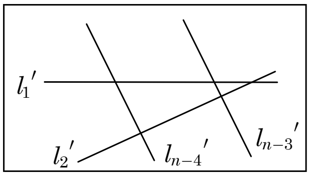
そこに，$n-1$ 枚目の平面 H_{n-1} を置き，H_{n-1} と平面 H_1，…，H_{n-2} との交線 l_1''，…，l_{n-2}'' について，$l_{n-3}'' \,/\!/\, l_{n-2}''$ を満たすようにする。(2)と同様に考えると，このときの空間の分割数は c_{n-1} となる。

［平面 H_{n-1} 上］



さらに，この H_1，…，H_{n-1} に n 枚目の平面 H_n を置き，H_n と平面 H_1，…，H_{n-1} との交線 l_1'，…，l_{n-1}' について，$l_{n-4}' \,/\!/\, l_{n-3}'$ を満たすようにする。このときの空間の分割数は d_n は，(2)と同様に考えると，

［平面 H_n 上］



$$d_n = c_{n-1} + a_{n-2} + n - 2$$
$$= \frac{1}{6}\{(n-1)^3 + 5(n-1)\} + \frac{1}{2}\{(n-2)^2 + (n-2) + 2\} + n - 2$$
$$= \frac{1}{6}(n^3 + 5n - 6) \cdots\cdots\cdots ③$$

これより，$d_n = c_n - 1$ となるので，d_n は $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとり得る値のうち 3 番目に大きいものになる。

次に，$n = 3$ のとき，①から $b_3 = 8$，②から $c_3 = 7$ であり，$T(H_1,\ H_2,\ H_3)$ の値が問題文の例から 6 になる場合もあるので，このときも③は成立する。

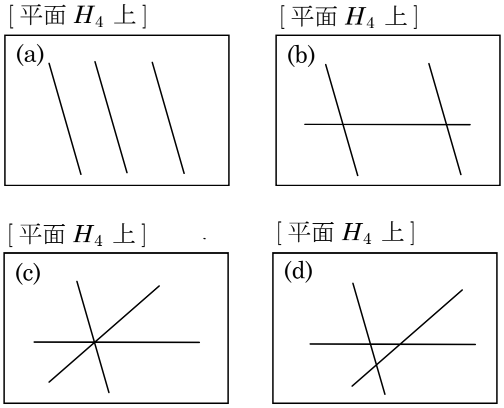
$n = 4$ のとき，①から $b_4 = 15$，②から $c_4 = 14$ であるが，$T(H_1,\ \cdots,\ H_4)$ の値が $14 - 1 = 13$ になる場合もあるかどうかを，以下で調べる。

さて，3 平面で分割される平面の数 $T(H_1,\ H_2,\ H_3)$ の値は，

$$T(H_1,\ H_2,\ H_3) = 4,\ 6,\ 7,\ 8$$

ここで，$T(H_1,\ \cdots,\ H_4) \leqq 2T(H_1,\ H_2,\ H_3)$ に注意すると，$T(H_1,\ H_2,\ H_3)$ のの値が 4 または 6 のときは，$T(H_1,\ \cdots,\ H_4) \neq 13$ である。

次に，3 枚の平面 H_1，H_2，H_3 を配置して，4 枚目の平面 H_4 を置くとき，その交線が 2 本以下のときは $T(H_1,\ \cdots,\ H_4) \neq 13$ なので，以下，3 本の場合を考えると，次図の(a)～(d)の 4 つのパターンに分類できる。



そして，空間の分割数については，(a)の場合が 4 だけ増え，(b)と(c)の場合が 6 だけ増え, (d)の場合が 7 だけ増える。

(i)　$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=8$ のとき

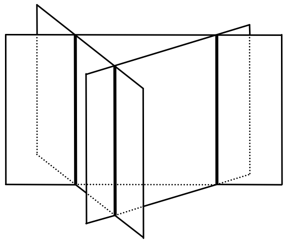
このとき，$T(H_1,\ \cdots,\ H_4)$ の値は,

$$T(H_1,\ \cdots,\ H_4)=12,\ 14,\ 15$$

すべて $T(H_1,\ \cdots,\ H_4)\neq 13$ である。

(ii)　$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$ のとき

$T(H_1,\ \cdots,\ H_4)=13$ となるのは, (b)または(c)の場合である。



ところが，$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$ を満たす平面 H_1，H_2，H_3 の配置は，右図のような三角柱の側面を形成するものであり，これから H_4 との交線が(b)または(c)の場合はなく，すなわち $T(H_1,\ \cdots,\ H_4)\neq 13$ である。

(i)(ii)より，いずれの場合も $T(H_1,\ \cdots,\ H_4)\neq 13$ である。

ところで，平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y=0$ を H_4 とすると，$T(H_1,\ \cdots,\ H_4)=12$ になる。

以上まとめると，$T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものは,

$$d_n=\frac{1}{6}(n^3+5n-6)\ (n=3,\ n\geqq 5),\ 12\ (n=4)$$

［解 説］

漸化式の応用題で，かなりの難問です。(1)の前半は教科書にも載せられているもので，これを誘導にして後半もクリアできます。時間無制限でなければ，実質的にここまででしょう。なお，(2)は(1)の結論マイナス 1，(3)は(2)の結論マイナス 1 と予想できますが，「それだけのための出題ではないはず」と考えるのも「常識」かもしれません。ただ，上の解答例はかなり雑な記述になっていますが……。

5

問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ に対し，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log(x+1)-\log x+1-\frac{x+1}{x}=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}$$
$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x(x+1)+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$$

すると，$x>0$ において，$f'(x)<\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\right\}=0$

よって，$f(x)$ は $x>0$ で減少する。

(2)　$a=\dfrac{2^8}{3^4}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^4$ で，$b_k=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}>0$ のとき，

$$\frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{(k+2)^{k+2}}{a^{k+1}(k+1)!}\cdot\frac{a^k k!}{(k+1)^{k+1}}=\frac{(k+2)^{k+2}}{a(k+1)^{k+2}}=\frac{1}{a}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}$$

ここで，$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}>1$ $(b_k<b_{k+1})$ とおくと，$\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}>1$ から，

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}>a=\left(\frac{4}{3}\right)^4,\ (k+2)\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)>\log\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)から，$f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少するので，$(*)$を満たす k の範囲は $k<2$ である。

そして，$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<1$ $(b_k>b_{k+1})$ を満たす k の範囲は $k>2$，$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=1$ $(b_k=b_{k+1})$ を満たす k は $k=2$ となるので，

$$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots\cdots$$

よって，$\{b_k\}$ の項で最大となるのは $k=2,\ 3$ のときで，このときの最大値 M は，

$$M=b_2=3^3\left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}=\frac{3^{11}}{2^{17}}$$

［解　説］

微分と数列の標準的な融合問題です。(1)の結果が(2)にストレートに反映します。