1

解答解説のページへ

N を自然数として，表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え，この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1.　$x \leqq 0$ のとき，$f(x)=0$

2.　x が N 以下の自然数 n に等しいとき，n 回目に，
　　表が出れば $f(n)=f(n-1)+1$，裏が出れば $f(n)=f(n-1)-1$

3.　x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n として，$f(x)=(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)$

4.　$x>N$ のとき，$f(x)=f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$N=8$ のとき，試行の結果が「表，表，裏，裏，表，裏，裏，裏」の順となったとき，$f(x)$ のグラフを描け。

(2)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。$P(k)$ を N, k を用いて表せ。

(3)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。$Q(k)$ を N, k を用いて表せ。

(4)　(3)の $Q(k)$ について $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kQ(k)$ を N を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数, m を実数とし，$k_1 = m + \sqrt{m^2+1}$，$k_2 = m - \sqrt{m^2+1}$ とする。さらに，C_0，C_1，C_2 を複素数平面上でそれぞれ

$$C_0 : (m+i)z + (m-i)\overline{z} + 2a = 0,\quad C_1 : (k_1+i)z + (k_1-i)\overline{z} - 2a{k_1}^2 = 0$$

$$C_2 : (k_2+i)z + (k_2-i)\overline{z} - 2a{k_2}^2 = 0$$

を満たす点 z の集合とする。ここで，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　C_0，C_1，C_2 がいずれも直線であることを示せ。

(2)　C_0 と C_1 の共有点を P_1 とし，m を変化させたとき P_1 が描く曲線を F_1 とする。F_1 はどのような曲線か。a を用いて答えよ。

(3)　$m>0$ のとき，C_1，C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積を T とし，(2)の F_1 と C_1，C_2，虚軸で囲まれる領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ が a によらず一定であることを示し，その極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，P(t, 1, 0)，Q(0, t, 1)，R(1, 0, t) をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $t=1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。

(2) △PQR, △APR, △BQP, △CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。V_1 を t を用いて表せ。

(3) O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　まず，関数$f(x)$について，$f(x)=0\ (x\leqq 0)$，$f(x)=f(N)\ (x>N)$

また，nが自然数のとき$f(n)$について，コインの表が出れば$f(n)=f(n-1)+1$，裏が出れば$f(n)=f(n-1)-1$とする。

さらに，$x\ (n-1<x<n)$が自然数でないとき，

$$f(x)=(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)$$

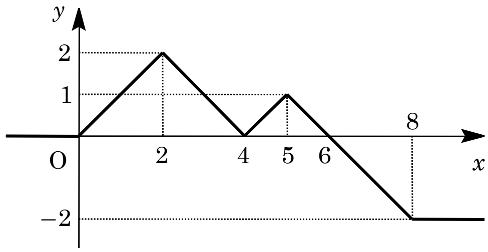
すると，$f(x)=\dfrac{(n-x)f(n-1)+(x-n+1)f(n)}{(x-n+1)+(n-x)}$と表せるので，点$(x,\ f(x))$は，2 点$P_{n-1}(n-1,\ f(n-1))$，$P_n(n,\ f(n))$を結ぶ線分を$(x-n+1):(n-x)$に内分する点になる。すると，このとき$f(x)$のグラフは線分$P_{n-1}P_n$である。

さて，$N=8$で，試行の結果が「表，表，裏，裏，表，裏，裏，裏」のとき，

$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=2$

$f(3)=1$，$f(4)=0$，$f(5)=1$

$f(6)=0$，$f(7)=-1$，$f(8)=-2$



これより，$f(x)$のグラフは右図の太線部となる。

(2)　$f(x)$がある$x=n$で極大値をとるには，コインの n 回目が表で$n+1$回目が裏であり，またある$x=n$で極小値をとるには，コインのn回目が裏で$n+1$回目が表である。これより，コインの 1 回目が表で，極大→極小→極大→極小→…と続くときと，コインの 1 回目が裏で，極小→極大→極小→極大→…と続くときの 2 つの場合があることになる。

さて，$f(x)$が$x=n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k\ (1\leqq n_1<n_2<\cdots<n_k\leqq N-1)$で極値をとるとする。ただし，$N\geqq 2$，$0\leqq k\leqq N-1$とする。

このとき，$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$の選び方が${}_{N-1}C_k$通りなので，コインを N 回投げて，$f(x)$が極値をとる点の個数がkとなる確率$P(k)$は，

$$P(k)={}_{N-1}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^N={}_{N-1}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

なお，$k\geqq N$のとき$P(k)=0$である。

また，$N=1$のとき，$P(0)=1$，$P(k)=0\ (k\geqq 1)$である。

(3)　$f(x)$が極大となる点の個数がkのときについて，

(i)　1 回目が表で，極大→極小→極大→…→極小→極大となり，N回目は裏のとき極小は$k-1$回で，極値をとる点の個数は$k+(k-1)=2k-1$となる。

(ii)　1 回目が表で，極大→極小→極大→…→極大→極小となり，N回目は表のとき極小はk回で，極値をとる点の個数は$k+k=2k$となる。

(iii) 1 回目が裏で，極小→極大→極小→…→極小→極大となり，N 回目は裏のとき
極小は k 回で，極値をとる点の個数は $k+k=2k$ となる。

(iv) 1 回目が裏で，極小→極大→極小→…→極大→極小となり，N 回目は表のとき
極小は $k+1$ 回で，極値をとる点の個数は $k+(k+1)=2k+1$ となる。

(i)〜(iv)より，$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率 $Q(k)$ は,

$$Q(k)={}_{N-1}\mathrm{C}_{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=({}_{N-1}\mathrm{C}_{2k-1}+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{N-1}\mathrm{C}_{2k+1})\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=({}_{N}\mathrm{C}_{2k}+{}_{N}\mathrm{C}_{2k+1})\left(\frac{1}{2}\right)^N={}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^N\ (2k\leqq N)$$

なお，$2k>N$ のとき，$Q(k)=0$ である。

(4)　$E=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}kQ(k)$ とおくと，(3)から，

$$E=\sum_{k=0}^{N}k\,{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^N=\left(\frac{1}{2}\right)^N\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2}\{(2k+1)\,{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}-{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left\{\sum_{k=0}^{N}(2k+1)\,{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}-\sum_{k=0}^{N}{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left\{\sum_{k=0}^{N}(N+1)\,{}_{N}\mathrm{C}_{2k}-\sum_{k=0}^{N}{}_{N+1}\mathrm{C}_{2k+1}\right\}$$

${}_{N}\mathrm{C}_{0}+{}_{N}\mathrm{C}_{2}+{}_{N}\mathrm{C}_{4}+\cdots={}_{N}\mathrm{C}_{1}+{}_{N}\mathrm{C}_{3}+{}_{N}\mathrm{C}_{5}+\cdots=\dfrac{1}{2}(1+1)^N=2^{N-1}$ なので，

$$E=\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\{(N+1)\cdot2^{N-1}-2^N\}=\frac{N+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{N-1}{4}$$

［解 説］

確率と二項定理の融合問題で，題意を理解することからスタートするタイプです。そのため，30 分程度の時間ではとうてい無理でしょう。なお，極大と極小は交互に現れますが, (3)では，このパターンをもとに場合分けをしています。また, (4)については，かなりアバウトな記述です。特に，下から 2 行目ですが……。

2

問題のページへ

(1) 複素数平面上で，$a>0$ で m が実数のとき，$C_0:(m+i)z+(m-i)\overline{z}+2a=0$ に対して，$z=x+yi$ とおくと，$(m+i)(x+yi)+(m-i)(x-yi)+2a=0$ となり，

$$(mx-y)+(my+x)i+(mx-y)-(my+x)i+2a=0$$

すると，$mx-y+a=0$ すなわち $C_0:y=mx+a$ ……①となり，直線を表す。

さて，$C_1:(k_1+i)z+(k_1-i)\overline{z}-2ak_1^{\ 2}=0$ は，①に対して $m\to k_1$，$a\to -ak_1^{\ 2}$ が対応し，$C_2:(k_2+i)z+(k_2-i)\overline{z}-2ak_2^{\ 2}=0$ は，①に対して $m\to k_2$，$a\to -ak_2^{\ 2}$ が対応する。

よって，C_0，C_1，C_2 はいずれも直線である。

(2) (1)より，C_1，C_2 の表す直線の方程式は，

$$C_1:y=k_1x-ak_1^{\ 2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad C_2:y=k_2x-ak_2^{\ 2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②を連立すると，$mx+a=k_1x-ak_1^{\ 2}$ となり，$(k_1-m)x=a(k_1^{\ 2}+1)$

ここで，$k_1=m+\sqrt{m^2+1}$ から，$\sqrt{m^2+1}\,x=2a\left(m^2+1+m\sqrt{m^2+1}\right)$ となり，

$$x=2a\cdot\frac{m^2+1+m\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}=2a\left(\sqrt{m^2+1}+m\right)=2ak_1\ \cdots\cdots\cdots④$$

②より，$y=2ak_1^{\ 2}-ak_1^{\ 2}=ak_1^{\ 2}$ となり，④から $k_1=\dfrac{x}{2a}$ なので，

$$y=a\left(\frac{x}{2a}\right)^2=\frac{x^2}{4a}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$f(m)=m+\sqrt{m^2+1}$ とおくと，$k_1=f(m)$ となり，

$$f'(m)=1+\frac{2m}{2\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{m^2+1}+m}{\sqrt{m^2+1}}>0$$

また，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m)=\lim_{m\to\infty}\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)=\infty$ であり，

$$\lim_{m\to-\infty}f(m)=\lim_{m\to-\infty}\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)=\lim_{m'\to\infty}\left(-m'+\sqrt{(-m')^2+1}\right)$$
$$=\lim_{m'\to\infty}\frac{1}{m'+\sqrt{m'^2+1}}=0$$

これより，$f(m)$ すなわち k_1 はすべての正の値をとり，$a>0$ なので④から $x>0$ となる。

よって，C_0 と C_1 の共有点 P_1 が描く曲線 F_1 は，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4a}\ (x>0)$ である。

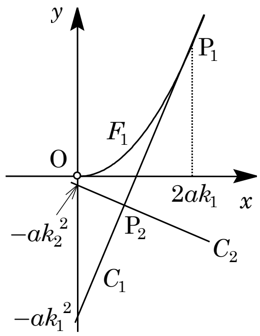
(3) $m>0$ のとき，②③を連立すると，$k_1x-ak_1^{\ 2}=k_2x-ak_2^{\ 2}$ となり，

$$(k_1-k_2)x=a(k_1^{\ 2}-k_2^{\ 2})$$

$k_2=m-\sqrt{m^2+1}$ より $k_1>k_2$ なので，$x=a(k_1+k_2)$

$$y=ak_1(k_1+k_2)-ak_1^{\ 2}=ak_1k_2$$

よって，C_1 と C_2 の交点 P_2 の座標は，$\mathrm{P}_2\left(a(k_1+k_2),\ ak_1k_2\right)$ となる。



また，F_1 と C_1 の関係は，②⑤を連立して，

$$\frac{x^2}{4a}=k_1x-ak_1{}^2,\ x^2-4ak_1x+4a^2k_1{}^2=0$$

すると，$(x-2ak_1)^2=0$ となり，F_1 と C_1 は $x=2ak_1$ において接する。

以上より，F_1，C_1，C_2 の関係は右図のようになる。

すると，C_1，C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積 T は,

$$T=\frac{1}{2}(-ak_2{}^2+ak_1{}^2)\cdot a(k_1+k_2)$$

$$=\frac{1}{2}a^2(-k_2+k_1)(k_1+k_2)^2=\frac{1}{2}a^2\cdot 2\sqrt{m^2+1}\cdot(2m)^2=4a^2m^2\sqrt{m^2+1}$$

また，F_1 と C_1，C_2，虚軸で囲まれる領域の面積を S とすると，

$$T+S=\int_0^{2ak_1}\Big(\frac{x^2}{4a}-k_1x+ak_1{}^2\Big)dx=\frac{1}{4a}\int_0^{2ak_1}(x-2ak_1)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{4a}\Big[\frac{1}{3}(x-2ak_1)^3\Big]_0^{2ak_1}=\frac{1}{12a}\cdot 8a^3k_1{}^3=\frac{2}{3}a^2k_1{}^3$$

これより，$S=\dfrac{2}{3}a^3k_1{}^3-T$ となり，

$$\frac{S}{T}=\frac{2}{3T}a^3k_1{}^3-1=\frac{2a^2k_1{}^3}{12a^2m^2\sqrt{m^2+1}}-1=\frac{\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)^3}{6m^2\sqrt{m^2+1}}-1$$

すると，$\dfrac{S}{T}$ は a によらず一定であり，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S}{T}=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)^3}{6m^2\sqrt{m^2+1}}-1\right\}=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\sqrt{1+m^{-2}}\right)^3}{6\sqrt{1+m^{-2}}}-1\right\}$$

$$=\frac{(1+1)^3}{6}-1=\frac{1}{3}$$

したがって，$\dfrac{T}{S}=\Big(\dfrac{S}{T}\Big)^{-1}$ から，$\dfrac{T}{S}$ は a によらず一定であり，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}=3$ となる。

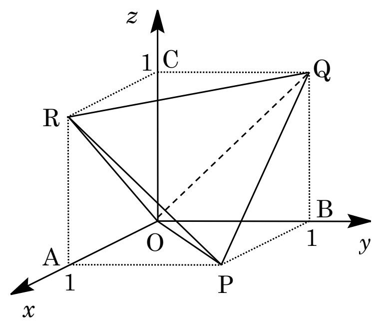
［解 説］

複素数平面上の図形についての問題ですが，内容的には xy 平面上で処理したのと変わりはありません。ただ，計算量はかなりのものになりました。

3

問題のページへ

(1)　xyz 空間において，7 つの点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(1,\ 0,\ 1)$に対して，3 点 P, Q, R を含む平面の方程式は,



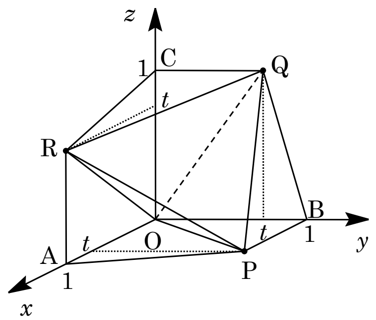
$$x+y+z=2 \cdots\cdots\cdots①$$

O と平面①との距離は，$\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

また，$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形なので，その面積は$\dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，これより四面体 OPQR の体積 V_0 は,

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

(2)　$t>0$ で，$\mathrm{P}(t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t,\ 1)$，$\mathrm{R}(1,\ 0,\ t)$に対して，3 点 P, Q, R を含む平面の方程式は,



$$x+y+z=t+1 \cdots\cdots\cdots②$$

O と平面②との距離は，$\dfrac{|-(t+1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}$

また，$\triangle\mathrm{PQR}$ の 1 辺の長さは,

$$\sqrt{t^2+(1-t)^2+(-1)^2}=\sqrt{2(t^2-t+1)}$$

すると，この正三角形の面積は$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2(t^2-t+1)}\right)^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)$ となる。

これより，四面体 OPQR の体積 V_0 は,

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\cdot\frac{t+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}(t+1)(t^2-t+1)=\frac{1}{6}(t^3+1)$$

さらに，四面体 OAPR，四面体 OBQP，四面体 OCRQ の体積は，いずれも $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)t=\dfrac{1}{6}t$ なので，$\triangle\mathrm{PQR}$，$\triangle\mathrm{APR}$，$\triangle\mathrm{BQP}$，$\triangle\mathrm{CRQ}$ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積 V_1 は,

$$V_1=V_0+\frac{1}{6}t\cdot 3=\frac{1}{6}(t^3+3t+1)$$

(3)　O を中心とし，$\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+1}$ を半径とする球の体積 V_2 は,

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\mathrm{OP}^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3$$

すると，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{6}(t^3+3t+1)\cdot\dfrac{3}{4\pi\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3}=\dfrac{1}{8\pi}\sqrt{\dfrac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}}$ となる。

そこで，$f(t)=\dfrac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}\ (t>0)$ とおくと，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{8\pi}\sqrt{f(t)}$ となり，

$$\log f(t)=2\log(t^3+3t+1)-3\log(t^2+1)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{2(3t^2+3)}{t^3+3t+1}-\frac{3\cdot 2t}{t^2+1}=\frac{6(t^2+1)^2-6t(t^3+3t+1)}{(t^2+1)(t^3+3t+1)}$$

$$=\frac{-6(t^2+t-1)}{(t^2+1)(t^3+3t+1)}$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となるのは $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときである。

［解 説］

空間図形と微分法の融合問題です。(1)は他の方法も考えられますが, (2)との関連で, 平面の方程式を利用する解法を採りました。なお, ①と②については, 同一直線上にない 3 点で, 平面が決定することから導いています。詳しくは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。