1　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$|x^2-x-23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ。

(2)　k 個の連続した正の整数 x_1，…，x_k に対して，$|{x_j}^2-x_j-23|$ $(1 \leqq j \leqq k)$ の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，…，x_k をすべて求めよ。ここで，k 個の連続した整数とは，x_1，x_1+1，x_1+2，…，x_1+k-1 となる列のことである。

2

解答解説のページへ

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 α, β, γ で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ であることを示せ。

(2) △ABC が正三角形のとき, △ABC の外接円上に点 P を任意にとる。このとき, $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ および $\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$ を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし 2 点 X, Y に対し, XY とは線分 XY の長さを表す。

3

解答解説のページへ

座標空間に 5 点 O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 4)，P(0, 0, -2) をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q(a, 0, 0) と R(0, b, 0) を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標, および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点(a, b) の範囲を座標平面に図示せよ。

4

解答解説のページへ

n を正の奇数とする。曲線 $y=\sin x\ \big((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi\big)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする。直線 $x+y=0$ を l とおき，l のまわりに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする。

(1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく。また P から l に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ を l のまわりに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ。

(2)　(1)の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

k を正の整数とし，$a_k=\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ とおく。

(1)　a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ。

(2)　k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ。

(3)　(2)の極限値 A に対し, k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束する整数 $m,\ n\,(m>n\geqq 1)$ を求めよ。またそのときの極限値 B を求めよ。

(4)　(2) と (3) の極限値 $A,\ B$ に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$ が 0 ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r\,(p>q>r\geqq 1)$ を求めよ。またそのときの極限値を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　以下 mod 3 で記述すると，条件より正の整数 x に対し，$|x^2-x-23|\equiv 2$ ………①

まず，$a=x^2-x-23=x(x-1)-23$ とおくと，$x=5$ のとき $a=5\times 4-23=-3$，$x=6$ のとき $a=6\times 5-23=7$ となり，x に対し a は単調増加するので，$1\leqq x\leqq 5$ のとき $a<0$，$x\geqq 6$ のとき $a>0$ であることがわかる。

(i)　$1\leqq x\leqq 5$ のとき　①は，$-x^2+x+23\equiv 2$ である。

(a)　$x\equiv 0$ のとき　$-x^2+x+23\equiv 0+0+23\equiv 23\equiv 2$ となり，①を満たす。

(b)　$x\equiv 1$ のとき　$-x^2+x+23\equiv -1+1+23\equiv 23\equiv 2$ となり，①を満たす。

(c)　$x\equiv 2$ のとき　$-x^2+x+23\equiv -4+2+23\equiv 21\equiv 0$ となり，①を満たさない。

(ii)　$x\geqq 6$ のとき　①は，$x^2-x-23\equiv 2$ である。

(a)　$x\equiv 0$ のとき　$x^2-x-23\equiv 0-0-23\equiv -23\equiv 1$ となり，①を満たさない。

(b)　$x\equiv 1$ のとき　$x^2-x-23\equiv 1-1-23\equiv -23\equiv 1$ となり，①を満たさない。

(c)　$x\equiv 2$ のとき　$x^2-x-23\equiv 4-2-23\equiv -21\equiv 0$ となり，①を満たさない。

(i)(ii)より，①を満たすのは，$x=1,\ 3,\ 4$ である。

(2)　正の整数 x に対して $|x^2-x-23|$ が素数になるのは，$|x^2-x-23|=3$ ……②の場合を除くと，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であることが必要である。

(i)　$1\leqq x\leqq 5$ のとき

②より，$-x^2+x+23=3$ から $(x+4)(x-5)=0$ となり，$x=5$ で満たされる。

また，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であるのは，(1)から $x=1,\ 3,\ 4$ のときとなり，連続する $x=3,\ 4$ の場合を調べると，

・$x=3$ のとき　$|x^2-x-23|=-9+3+23=17$

・$x=4$ のとき　$|x^2-x-23|=-16+4+23=11$

よって，連続する 3 整数 $x=3,\ 4,\ 5$ で，$|x^2-x-23|$ は素数になる。

(ii)　$x\geqq 6$ のとき

②より，$x^2-x-23=3$ から $x^2-x-26=0$ となり，正の整数 x は存在しない。

また，$|x^2-x-23|\equiv 1,\ 2$ であるのは，(1)から $x\equiv 0,\ 1$ のときとなり，そのうち最小の連続する $x=6,\ 7$ の場合を調べると，

・$x=6$ のとき　$|x^2-x-23|=36-6-23=7$

・$x=7$ のとき　$|x^2-x-23|=49-7-23=19$

よって，連続する 2 整数 $x=6,\ 7$ で，$|x^2-x-23|$ は素数になる。

そして，$x\geqq 8$ では，(1)から $x\equiv 2$ ($x=8,\ 11,\ 14,\ \cdots$) の場合，$|x^2-x-23|$ は 3 の倍数（3 を除く）となり素数ではない。すなわち，$|x^2-x-23|$ が素数になる連続する正の整数 x の個数は，高々2 個となる。

(i)(ii)より，$\left|x^2-x-23\right|$がすべて素数となる連続する個数が最大な整数xは,

$x=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

以上より，連続した正の整数x_1，…，x_kに対して，$\left|{x_j}^2-x_j-23\right|$ $(1\leqq j\leqq k)$の値がすべて素数になるkの最大値は$k=5$であり，このとき,

$x_1=3$，$x_2=4$，$x_3=5$，$x_4=6$，$x_5=7$

［解 説］

剰余を題材にし，素数を絡めた整数問題で，(1)が(2)へのストレートな誘導になっています。そして，(2)のポイントは「3 の倍数で素数なのは 3 だけ」ということです。当たり前ですが……。

2　　　問題のページへ

(1)　複素数平面上で，同一直線上にない異なる 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ に対して，$\triangle ABC$ が正三角形となる条件は，以下，複号同順で，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

両辺 2 乗して，$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}$ となり，$\dfrac{(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}-\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0$

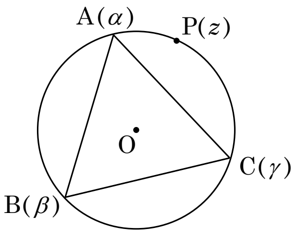
$$(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

展開して，$(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)-(\beta\gamma-\alpha\beta-\gamma\alpha+\alpha^2)+(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=0$ となり，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\cdots\cdots\cdots②$$

逆に，②が成立するとき，①が成り立つ。

(2)　まず，正三角形 ABC の外心を原点 O としても，一般性は失われない。ここで，外接円上の任意の点 $P(z)$ をとると，外接円の半径が R より，



$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|z|=R\cdots\cdots\cdots③$$

そして，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$ より，$\alpha+\beta+\gamma=0\cdots\cdots\cdots④$

さらに，$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ より，②④から，

$$0=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\text{，}\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$AP^2=|z-\alpha|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$ となり，③から，

$$AP^2=|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha|^2=2R^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}$$

同様に，$BP^2=2R^2-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}$，$CP^2=2R^2-\overline{\gamma}z-\gamma\overline{z}$ となるので，④から，

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2+CP^2&=6R^2-(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})z-(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&=6R^2-(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}=6R^2\end{aligned}$$

また，$AP^4=(AP^2)^2=\{2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\}^2$ となるので，

$$\begin{aligned}AP^4&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha}z)^2+2\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}+(\alpha\overline{z})^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha})^2z^2+2|\alpha|^2|z|^2+\alpha^2(\overline{z})^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha})^2z^2+2R^4+\alpha^2(\overline{z})^2\\&=6R^4-4R^2\overline{\alpha}z-4R^2\alpha\overline{z}+(\overline{\alpha})^2z^2+\alpha^2(\overline{z})^2\end{aligned}$$

同様に，$BP^4=6R^4-4R^2\overline{\beta}z-4R^2\beta\overline{z}+(\overline{\beta})^2z^2+\beta^2(\overline{z})^2$

$$CP^4=6R^4-4R^2\overline{\gamma}z-4R^2\gamma\overline{z}+(\overline{\gamma})^2z^2+\gamma^2(\overline{z})^2$$

以上より，④⑤を適用すると，$AP^4+BP^4+CP^4$ は，

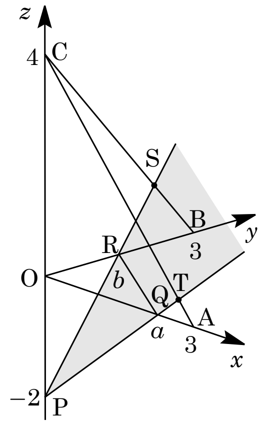
$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4&=6R^4\times3-4R^2(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&\quad+\{(\overline{\alpha})^2+(\overline{\beta})^2+(\overline{\gamma})^2\}z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\overline{z})^2\\&=18R^4-4R^2(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&\quad+(\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\overline{z})^2\\&=18R^4\end{aligned}$$

［解 説］

複素数平面上の図形を題材にした問題で，(1)は有名頻出題です。ただ，(2)の後半では計算の深みにはまってしまい，xy 平面を設定した方がよかったのではないかという考えが頭をよぎりました。しかし，(1)の結論②の意味を考え，⑤を導き利用する方針で処理しました。

3

問題のページへ



(1)　$0<a<3$，$0<b<3$ のとき，座標空間の点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$，$\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を通る平面 H は，$p+q+r=1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=p(0,\ 0,\ -2)+q(a,\ 0,\ 0)+r(0,\ b,\ 0)$$
$$=(aq,\ br,\ -2p)\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$ に対して，線分 AC は，$0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3,\ 0,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+t(3,\ 0,\ -4)$$
$$=(3t,\ 0,\ 4-4t)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，線分 BC は，$0\leqq s\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ 3,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+s(0,\ 3,\ -4)=(0,\ 3s,\ 4-4s)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，平面 H と線分 AC の交点を T とすると，①②から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(3t,\ 0,\ 4-4t)$$

$p=-2+2t$，$q=\dfrac{3}{a}t$，$r=0$ から，$-2+2t+\dfrac{3}{a}t=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{a}\right)t=3$

これより $t=\dfrac{3a}{2a+3}$ となり，T の座標は $\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{-4a+12}{2a+3}\right)$ である。

同様に，平面 H と線分 BC の交点を S とすると，①③から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(0,\ 3s,\ 4-4s)$$

$p=-2+2s$，$q=0$，$r=\dfrac{3}{b}s$ から，$-2+2s+\dfrac{3}{b}s=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{b}\right)s=3$

これより $s=\dfrac{3b}{2b+3}$ となり，S の座標は $\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{-4b+12}{2b+3}\right)$ である。

(2)　点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は，方べきの定理およびその逆から，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}\cdots\cdots④$ である。

ここで，$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PR}=\sqrt{b^2+4}$ であり，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{9a}{2a+3}\cdot\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{9}{2a+3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{PS}}=\frac{9b}{2b+3}\cdot\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{9}{2b+3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

よって，$\mathrm{PT}=\dfrac{9}{2a+3}\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PS}=\dfrac{9}{2b+3}\sqrt{b^2+4}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{9}{2a+3}(a^2+4)=\frac{9}{2b+3}(b^2+4),\quad (a^2+4)(2b+3)=(b^2+4)(2a+3)$$

展開すると，$2a^2b+3a^2+8b=2ab^2+3b^2+8a$ となり，

$$2ab(a-b)+3(a+b)(a-b)-8(a-b)=0,\quad (a-b)(2ab+3a+3b-8)=0$$

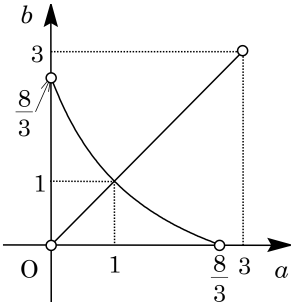
すると，求める条件は，$0<a<3$，$0<b<3$ のもとで，

$$a=b\cdots\cdots⑤\ \text{または}\ 2ab+3a+3b-8=0\cdots\cdots⑥$$

このとき，⑥から，$(2a+3)b=-3a+8$ となり，

$$b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{25}{2(2a+3)}$$

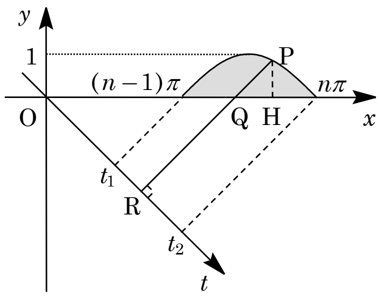
そして，⑤から $b=a$ と合わせて点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の実線部になる。ただし，端点の白丸は含まない。



［解 説］

空間図形を題材としたベクトルの問題に，4 点が同一円周上にある条件を絡めたものです。(2)では，計算だけで押し通すのは困難と予測し，次の手として，方べきの定理に気付くという点がポイントになっています。要演習の 1 題です。

$\boxed{4}$　　問題のページへ



(1)　n を正の奇数とするとき，曲線 $C: y=\sin x$ $\left((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi\right)$ と x 軸で囲まれた部分 D_n を，直線 $l: x+y=0$ のまわりに 1 回転させてできる回転体 V_n を考える。

ここで，C に対し $y'=\cos x$ から，$x=(n-1)\pi$ では $y'=1$ となり，点 $((n-1)\pi,\ 0)$ における接線は傾きが 1 であり，l と直交することに留意する。

さて，$\mathrm{P}(x,\ \sin x)$ から l に垂線を下ろし，その垂線と x 軸，l との交点をそれぞれ Q, R とし，また $\mathrm{H}(x,\ 0)$ とおくと，

$$\mathrm{PR}=\frac{|x+\sin x|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{PQ}=\sqrt{2}\mathrm{PH}=\sqrt{2}\sin x$$

これより，$\mathrm{QR}=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\sin x=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$ となり，線分 PQ を l のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の面積を S とすると，$S=\pi(\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2)$ となり，

$$S=\pi\left\{\frac{(x+\sin x)^2}{2}-\frac{(x-\sin x)^2}{2}\right\}=\frac{\pi}{2}\cdot 4x\sin x=2\pi x\sin x$$

(2)　まず，$t=\mathrm{OR}$ とすると，$\mathrm{OR}=\mathrm{QR}$ から $t=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$ ……(＊)である。

さて，$t_1=\dfrac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}$，$t_2=\dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$ とおくと，V_n の体積 W_n は $W_n=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}S\,dt$ となる。

ここで，(＊)から $dt=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{2}}dx$ となり，$t=t_1\to t_2$ は $x=(n-1)\pi\to n\pi$ に対応するので，(1)の結果を代入して，

$$\begin{aligned}
W_n&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2\pi x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}dx=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)\,dx\\
&=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{\left[-x\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x\right)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x\right)dx\right\}\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{-n\pi\left(-1-\frac{1}{4}\right)+(n-1)\pi\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}+\sqrt{2}\pi\left[\sin x-\frac{1}{8}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{\frac{5}{4}n\pi+\frac{3}{4}(n-1)\pi\right\}=\sqrt{2}\pi\left(2n\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2(8n-3)
\end{aligned}$$

［解　説］

斜回転体の体積を求める典型題です。誘導も丁寧ですし，計算も標準的です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) k を正の整数とし，$a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$ とするとき，

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\\&=-\frac{2}{\pi}\left[x^{k+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1(k+1)x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\\&=\frac{4(k+1)}{\pi^2}\left[x^k\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-\frac{4(k+1)}{\pi^2}\int_0^1 kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\\&=\frac{4(k+1)}{\pi^2}-\frac{4k(k+1)}{\pi^2}a_k=\frac{4}{\pi^2}(k+1)(1-ka_k)\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

(2) ①より，$1-ka_k=\dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{a_{k+2}}{k+1}$ となり，$ka_k=1-\dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{a_{k+2}}{k+1}\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$0\leqq\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\leqq 1$ より，

$$0\leqq\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\leqq\int_0^1 x^{k-1}dx=\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1=\frac{1}{k}$$

すると，$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx=0\cdots\cdots③$となり，②から，

$$A=\lim_{k\to\infty}ka_k=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{a_{k+2}}{k+1}\right)=1$$

(3) 整数 $m,\,n\,(m>n\geqq 1)$ に対して，$b_k=k^ma_k-k^nA$ とおくと，$A=1$ なので，

$$b_k=k^ma_k-k^n=k^n(k^{m-n}a_k-1)=k^n(k^{m-n-1}\cdot ka_k-1)$$

すると，$\lim\limits_{k\to\infty}b_k=B\neq 0\cdots\cdots④$であるためには，

$$\lim_{k\to\infty}(k^{m-n-1}\cdot ka_k-1)=0\quad(m-n-1\geqq 0)\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，(2)から $\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=1$ なので，$m-n-1\geqq 1$ のとき⑤は成立しない。

次に，$m-n-1=0$ のとき⑤は成立し，すなわち④が成り立つには $m=n+1$ が必要である。このとき，

$$b_k=k^{n+1}a_k-k^n$$

(i) $n=1$ のとき　$b_k=k^2a_k-k=k(ka_k-1)$ となり，②③から，

$$\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{k\to\infty}k\left(1-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{a_{k+2}}{k+1}-1\right)=-\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k}{k+1}a_{k+2}=0$$

よって，④は成立しない。

(ii) $n=2$ のとき　$b_k=k^3a_k-k^2=k^2(ka_k-1)$ となり，②③から，

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}b_k&=\lim_{k\to\infty}k^2\left(1-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{a_{k+2}}{k+1}-1\right)=-\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot ka_{k+2}\\&=-\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k}{k+2}\cdot(k+2)a_{k+2}=-\frac{\pi^2}{4}\cdots\cdots\cdots⑥\end{aligned}$$

(iii) $n \geqq 3$ のとき　$b_k = k^{n+1}a_k - k^n = k^{n-2}(k^3 a_k - k^2)$

このとき，⑥から $\displaystyle\lim_{k\to\infty} b_k = -\infty$ となり，④は成立しない。

(i)(ii)(iii)より，④が成立するのは $(m,\ n) = (3,\ 2)$ のときで，$B = -\dfrac{\pi^2}{4}$ である。

(4)　整数 $p, q, r\ (p > q > r \geqq 1)$ に対して，$c_k = k^p a_k - k^q A - k^r B$ とおく。

(2)(3)から，$A = \displaystyle\lim_{k\to\infty} k a_k = 1$，$B = \displaystyle\lim_{k\to\infty}(k^3 a_k - k^2) = -\dfrac{\pi^2}{4}$ であり，

$$c_k = k^p a_k - k^q - k^r B = k^r(k^{p-r}a_k - k^{q-r} - B)$$

すると，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_k = C \neq 0$ ……⑦であるためには,

$$\lim_{k\to\infty}(k^{p-r}a_k - k^{q-r} - B) = 0,\quad \lim_{k\to\infty}(k^{p-r}a_k - k^{q-r}) = B$$

⑥から，$p - r = 3$，$q - r = 2$，すなわち⑦が成り立つには $p = r + 3$，$q = r + 2$ が必要である。このとき,

$$c_k = k^{r+3}a_k - k^{r+2} - k^r B$$

(iv) $r = 1$ のとき　$c_k = k^4 a_k - k^3 - kB$ となり，②から $k^4 a_k = k^3 - \dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{k^3}{k+1}a_{k+2}$

$$c_k = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k^3}{k+1}a_{k+2} - kB = \frac{k^3 B}{k+1}a_{k+2} - kB = B\left(\frac{k^3}{k+1}a_{k+2} - k\right)$$

さらに，②から，$(k+2)a_{k+2} = 1 - \dfrac{\pi^2}{4}\cdot\dfrac{a_{k+4}}{k+3} = 1 + \dfrac{B}{k+3}a_{k+4}$ となり,

$$\begin{aligned}
c_k &= B\left\{\frac{k^3}{(k+1)(k+2)}\cdot(k+2)a_{k+2} - k\right\}\\
&= B\left\{\frac{k^3}{(k+1)(k+2)}\left(1 + \frac{B}{k+3}a_{k+4}\right) - k\right\}\\
&= B\left\{\frac{k^3}{(k+1)(k+2)} - k + \frac{k^3 B}{(k+1)(k+2)(k+3)}a_{k+4}\right\}\\
&= B\left\{\frac{-k(3k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{k^3 B}{(k+1)(k+2)(k+3)}a_{k+4}\right\}
\end{aligned}$$

すると，③から，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_k = B\cdot(-3) = \frac{3}{4}\pi^2$ ………⑧

(v)　$r \geqq 2$ のとき　$c_k = k^{r+3}a_k - k^{r+2} - k^r B = k^{r-1}(k^4 a_k - k^3 - kB)$

このとき，⑧から $\displaystyle\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$ となり，⑦は成立しない。

(iv)(v)より，⑦が成立するのは $(p,\ q,\ r) = (4,\ 3,\ 1)$ のときで，$C = \dfrac{3}{4}\pi^2$ である。

［解　説］

定積分と数列の極限の融合問題です。いわゆる不定形を解消するために，漸化式②の利用が要点ですが，ただ難航する場面も多く，時間はかなり費やしました。