1

解答解説のページへ

0 から 9 までの相異なる整数が 1 つずつ書かれた 10 個の球が，袋の中に入っている。この袋から球を無作為に 1 個取り出してはもとにもどす操作を 3 回くり返したとき，取り出した球に書かれている数を順に a_1，a_2，a_3 とする。また $b_1=10+a_1$，$b_2=20+a_2$，$b_3=30+a_3$ とおき，b_1，b_2，b_3，$b_1+b_2+b_3$ の 1 の位を四捨五入してえられる数をそれぞれ c_1，c_2，c_3，c_4 とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$b_1+b_2+b_3=70$ となる確率を求めよ。

(2)　$c_4=90$ となる確率を求めよ。

(3)　$c_1=20$ かつ $c_1+c_2+c_3>c_4$ となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ h$ を正の実数とし, xyz 空間の 5 点 $\mathrm{A}(a,\ a,\ 0)$, $\mathrm{B}(-a,\ a,\ 0)$, $\mathrm{C}(-a,\ -a,\ 0)$, $\mathrm{D}(a,\ -a,\ 0)$, $\mathrm{E}(0,\ 0,\ h)$ を頂点とする四角錐を P とする。P の yz 平面による断面の周の長さが 1 であるとき, 以下の各問いに答えよ。

(1)　h を a の式で表せ。また, a が取り得る値の範囲を求めよ。

(2)　球 S は P のすべての面に接しているとする。a が(1)で求めた範囲を動くとき, S の体積が最大となる a の値を求めよ。

(3)　直方体 Q は 1 つの面が xy 平面上にあり, すべての頂点が P の辺上または面上にあるとする。a を固定したとき, Q の体積が取り得る値の最大値を $V(a)$ とおく。a が(1)で求めた範囲を動くとき, $V(a)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とし，曲線 $C : y = b\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　u を実数とし，C 上の点 $\left(u,\ b\sqrt{1+\dfrac{u^2}{a^2}}\right)$ における接線の方程式を，$a,\ b,\ u$ を用いて表せ。

(2)　C 上の異なる 2 点における接線の交点の全体からなる領域を図示せよ。

(3)　(2)の領域にある点 $(p,\ q)$ について，点 $(p,\ q)$ を通る C の接線の接点をすべて通る直線の方程式を，a, b, p, q を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　0 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 個の球が入っている袋から，球を無作為に 1 個取り出してはもとにもどす操作を 3 回くり返し，取り出した球に書かれた数を順に a_1，a_2，a_3 とする。$b_1=10+a_1$，$b_2=20+a_2$，$b_3=30+a_3$ とおく。

さて，$b_1+b_2+b_3=70$ となるのは，$(10+a_1)+(20+a_2)+(30+a_3)=70$ より，

$$a_1+a_2+a_3=10\quad(0\leqq a_1\leqq 9,\ 0\leqq a_2\leqq 9,\ 0\leqq a_3\leqq 9)\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の個数は，$a_1+a_2+a_3=10$ $(a_1\geqq 0,\ a_2\geqq 0,\ a_3\geqq 0)$ を満たす個数から，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(10,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 10,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 10)$ の 3 つの場合を除けばよいので,

$${}_3\mathrm{H}_{10}-3={}_{12}\mathrm{C}_{10}-3={}_{12}\mathrm{C}_2-3=66-3=63\ （通り）$$

よって，$b_1+b_2+b_3=70$ となる確率は，$\dfrac{63}{10^3}=\dfrac{63}{1000}$ である。

(2)　b_1，b_2，b_3，$b_1+b_2+b_3$ の 1 の位を四捨五入した数を c_1，c_2，c_3，c_4 としたとき，$10\leqq b_1\leqq 19$，$20\leqq b_2\leqq 29$，$30\leqq b_3\leqq 39$ から，$60\leqq b_1+b_2+b_3\leqq 87$ となる。

すると，$c_4=90$ となるのは，$85\leqq b_1+b_2+b_3\leqq 87$ であり，

(i)　$b_1+b_2+b_3=85$ のとき　$a_1+a_2+a_3=25$ から，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のときは，

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(8,\ 8,\ 9),\ (7,\ 9,\ 9)$$

これより，条件に適する $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，$\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}=6$ 通りある。

(ii)　$b_1+b_2+b_3=86$ のとき　$a_1+a_2+a_3=26$ から，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のときは，

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(8,\ 9,\ 9)$$

これより，条件に適する $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，$\dfrac{3!}{2!}=3$ 通りある。

(iii)　$b_1+b_2+b_3=87$ のとき　$a_1+a_2+a_3=27$ から，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(9,\ 9,\ 9)$

これより，条件に適する $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は，1 通りある。

(i)～(iii)より，$c_4=90$ となる確率は，$\dfrac{6+3+1}{10^3}=\dfrac{1}{100}$ である。

(3)　まず，$c_1=20$ より $15\leqq b_1\leqq 19$ となり，また $20\leqq b_2\leqq 29$，$30\leqq b_3\leqq 39$ から，$65\leqq b_1+b_2+b_3\leqq 87$ であるので,

$$c_2=20\ または\ 30,\ c_3=30\ または\ 40,\ c_4=70\ または\ 80\ または\ 90$$

(i)　$c_4=90$ のとき

$c_1+c_2+c_3>c_4$ から $c_2+c_3>70$ となるが，$c_2+c_3\leqq 30+40=70$ より不適。

(ii)　$c_4=80$ のとき

$c_1+c_2+c_3>c_4$ から $c_2+c_3>60$ なので，$(c_2,\ c_3)=(30,\ 40)$ であり，このとき，$15\leqq b_1\leqq 19$，$25\leqq b_2\leqq 29$，$35\leqq b_3\leqq 39$，$75\leqq b_1+b_2+b_3\leqq 84$ から，

$$5\leqq a_1\leqq 9,\ 5\leqq a_2\leqq 9,\ 5\leqq a_3\leqq 9,\ 15\leqq a_1+a_2+a_3\leqq 24$$

さて, 2 整数とその和をまとめると右表のようになり, これから条件に適する$(a_2,\ a_3)$の組は,

	5	6	7	8	9
5	10	11	12	13	14
6	11	12	13	14	15
7	12	13	14	15	16
8	13	14	15	16	17
9	14	15	16	17	18

・$a_1=5$のとき　$10 \leqq a_2+a_3 \leqq 19$から 25 通り

・$a_1=6$のとき　$10 \leqq a_2+a_3 \leqq 18$から 25 通り

・$a_1=7$のとき　$10 \leqq a_2+a_3 \leqq 17$から 24 通り

・$a_1=8$のとき　$10 \leqq a_2+a_3 \leqq 16$から 22 通り

・$a_1=9$のとき　$10 \leqq a_2+a_3 \leqq 15$から 19 通り

よって, 条件に適する$(a_1,\ a_2,\ a_3)$は, $25+25+24+22+19=115$通りある。

(iii)　$c_4=70$のとき

$c_1+c_2+c_3>c_4$ から $c_2+c_3>50$ なので, $(c_2,\ c_3)=(20,\ 40)$, $(30,\ 30)$, $(30,\ 40)$の 3 つの場合がある。

(iii-i)　$(c_2,\ c_3)=(20,\ 40)$のとき

$15 \leqq b_1 \leqq 19$, $20 \leqq b_2 \leqq 24$, $35 \leqq b_3 \leqq 39$, $65 \leqq b_1+b_2+b_3 \leqq 74$から,

$5 \leqq a_1 \leqq 9$, $0 \leqq a_2 \leqq 4$, $5 \leqq a_3 \leqq 9$, $5 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq 14$

さて, 2 整数とその和をまとめると右表のようになり, これから条件に適する$(a_2,\ a_3)$の組は,

	5	6	7	8	9
0	5	6	7	8	9
1	6	7	8	9	10
2	7	8	9	10	11
3	8	9	10	11	12
4	9	10	11	12	13

・$a_1=5$のとき　$5 \leqq a_2+a_3 \leqq 9$から 15 通り

・$a_1=6$のとき　$5 \leqq a_2+a_3 \leqq 8$から 10 通り

・$a_1=7$のとき　$5 \leqq a_2+a_3 \leqq 7$から 6 通り

・$a_1=8$のとき　$5 \leqq a_2+a_3 \leqq 6$から 3 通り

・$a_1=9$のとき　$5 \leqq a_2+a_3 \leqq 5$から 1 通り

よって, 条件に適する$(a_1,\ a_2,\ a_3)$は, $15+10+6+3+1=35$通りある。

(iii-ii)　$(c_2,\ c_3)=(30,\ 30)$のとき

$15 \leqq b_1 \leqq 19$, $25 \leqq b_2 \leqq 29$, $30 \leqq b_3 \leqq 34$, $65 \leqq b_1+b_2+b_3 \leqq 74$から,

$5 \leqq a_1 \leqq 9$, $5 \leqq a_2 \leqq 9$, $0 \leqq a_3 \leqq 4$, $5 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq 14$

(iii-i)のa_2とa_3が逆だけなので, 条件に適する$(a_1,\ a_2,\ a_3)$は 35 通りある。

(iii-iii)　$(c_2,\ c_3)=(30,\ 40)$のとき

$15 \leqq b_1 \leqq 19$, $25 \leqq b_2 \leqq 29$, $35 \leqq b_3 \leqq 39$, $65 \leqq b_1+b_2+b_3 \leqq 74$から,

$5 \leqq a_1 \leqq 9$, $5 \leqq a_2 \leqq 9$, $5 \leqq a_3 \leqq 9$, $5 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq 14$

すると, 条件に適する$(a_1,\ a_2,\ a_3)$はない。

(i)〜(iii)より, $c_1=20$かつ$c_1+c_2+c_3>c_4$となる確率は,

$$\frac{115+35+35}{10^3}=\frac{185}{1000}=\frac{37}{200}$$

［解 説］

体力の要求される確率の問題です。(3)では，まず$(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$の組を求め，各々の場合について，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$の組の個数を調べるという流れで解いています。

2

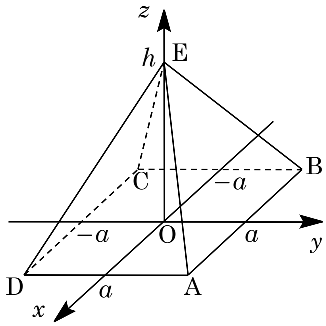
問題のページへ

(1)　右の四角錐 P の yz 平面による断面は，底辺 $2a$ で等辺 $\sqrt{a^2+h^2}$ の二等辺三角形であり，その周の長さが 1 なので，$2a+2\sqrt{a^2+h^2}=1$ となり，

$$2\sqrt{a^2+h^2}=1-2a \cdots\cdots\cdots ①$$

$1-2a>0$ のもとで，$4(a^2+h^2)=(1-2a)^2$ から，

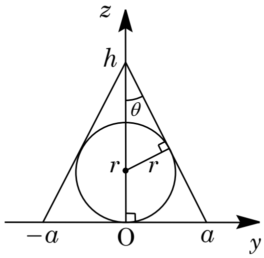
$$4h^2=1-4a,\ h=\frac{\sqrt{1-4a}}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$



なお，$a>0$ かつ $h>0$ より，$1-2a>0$，$1-4a>0$ となり，$0<a<\dfrac{1}{4}$ である。

(2)　四角錐 P の yz 平面による断面である二等辺三角形の頂角の大きさを 2θ とおき，また内接球 S の半径を r とすると，

$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{r}{h-r}$$



①より，$\dfrac{2a}{1-2a}=\dfrac{r}{h-r}$ となり，

$$2a(h-r)=r(1-2a),\ 2ah=r$$

②より，$r=\dfrac{2a\sqrt{1-4a}}{2}=a\sqrt{1-4a}=\sqrt{a^2-4a^3}$

ここで，$f(a)=a^2-4a^3$ とおくと，

$$f'(a)=2a-12a^2=2a(1-6a)$$

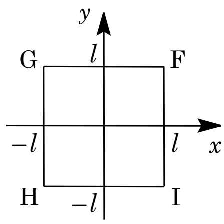
これより，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{1}{6}$ のとき最大値をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$
$f'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

すると，S の体積は，$\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ から，$a=\dfrac{1}{6}$ のとき最大値をとる。

(3)　四角錐 P の平面 $z=t\ (0<t<h)$ による断面を正方形 FGHI とし，1 辺の長さを $2l$ とおくと，$l:a=h-t:h$ となり，②から，

$$l=\frac{h-t}{h}a=\frac{h-t}{h}\cdot\frac{1-4h^2}{4}=\frac{1-4h^2}{4h}(h-t)$$



さて，xy 平面上に下面があり，すべての頂点が P の辺上または面上にある直方体 Q の上面が平面 $z=t\ (0<t<h)$ 上にあるとき，Q の体積 W が最大となるのは，その上面が正方形 FGHI のときなので，

$$W=(2l)^2t=\frac{(1-4h^2)^2}{4h^2}(h-t)^2t \quad (h \text{ は定数})$$

$$W'=\frac{(1-4h^2)^2}{4h^2}\{-2(h-t)t+(h-t)^2\}=\frac{(1-4h^2)^2}{4h^2}(h-t)(h-3t)$$

これより，W の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{h}{3}$ のとき最大値をとる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{h}{3}$	$\cdots$	h
W'		$+$	0	$-$	0
W		$\nearrow$		$\searrow$	

この W の最大値 $V(a)$ は，②を用いて，

$$V(a)=\frac{(1-4h^2)^2}{4h^2}\left(h-\frac{h}{3}\right)^2\frac{h}{3}$$

$$=\frac{1}{27}h(1-4h^2)^2=\frac{1}{27}\cdot\frac{\sqrt{1-4a}}{2}\{1-(1-4a)\}^2=\frac{8}{27}a^2\sqrt{1-4a}$$

$$=\frac{8}{27}\sqrt{a^4-4a^5}$$

ここで，$g(a)=a^4-4a^5$ とおくと，

$$g'(a)=4a^3-20a^4=4a^3(1-5a)$$

これより，$g(a)$ の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{1}{5}$ のとき最大値をとる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{5}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{4}$
$g'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$V(a)=\dfrac{8}{27}\sqrt{g(a)}$ から，$V(a)$ の最大値は，

$$V\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{1}{5}\right)^2\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{8}{675\sqrt{5}}=\frac{8}{3375}\sqrt{5}$$

［解 説］

四角錐を題材とした微分と増減の問題です。内容は標準的ですが，計算量はかなり多めです。

３

問題のページへ

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，曲線 $C: y=b\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ に対して，

$$y'=\frac{b}{a}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{bx}{a\sqrt{a^2+x^2}}$$

C 上の点 $\left(u,\ b\sqrt{1+\dfrac{u^2}{a^2}}\right)$，すなわち点 $\left(u,\ \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+u^2}\right)$ における接線の方程式は，

$$y-\frac{b}{a}\sqrt{a^2+u^2}=\frac{bu}{a\sqrt{a^2+u^2}}(x-u),\quad y=\frac{bu}{a\sqrt{a^2+u^2}}x+\frac{a^2b}{a\sqrt{a^2+u^2}}$$

よって，$y=\dfrac{b}{a\sqrt{a^2+u^2}}(ux+a^2)$ ………①

(2)　$v\neq u$ として，点 $\left(v,\ \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+v^2}\right)$ における接線の方程式は，(1)と同様にして，

$$y=\frac{b}{a\sqrt{a^2+v^2}}(vx+a^2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②の交点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とおくと，

$$y_0=\frac{b}{a\sqrt{a^2+u^2}}(ux_0+a^2)\ \cdots\cdots③,\quad y_0=\frac{b}{a\sqrt{a^2+v^2}}(vx_0+a^2)\ \cdots\cdots④$$

ここで，③④から，t についての方程式 $y_0=\dfrac{b}{a\sqrt{a^2+t^2}}(tx_0+a^2)$ ……⑤を考えて，

以下，⑤が少なくとも 2 個の異なる実数解をもつ $(x_0,\ y_0)$ の条件を求める。

そこで，$f(t)=\dfrac{b}{a\sqrt{a^2+t^2}}(tx_0+a^2)$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a^2+t^2}\left\{x_0\sqrt{a^2+t^2}-(tx_0+a^2)\cdot\frac{2t}{2\sqrt{a^2+t^2}}\right\}$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{x_0(a^2+t^2)-(tx_0+a^2)t}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}}=\frac{ab(x_0-t)}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}}$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=x_0$ で極大値をとり，

t	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$f(x_0)=\frac{b}{a\sqrt{a^2+{x_0}^2}}({x_0}^2+a^2)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+{x_0}^2}$$

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\frac{b}{a}\lim_{t\to-\infty}\frac{x_0+\dfrac{a^2}{t}}{-\sqrt{\dfrac{a^2}{t^2}+1}}=-\frac{b}{a}x_0,\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\frac{b}{a}\lim_{t\to\infty}\frac{x_0+\dfrac{a^2}{t}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{t^2}+1}}=\frac{b}{a}x_0$$

(i)　$-\dfrac{b}{a}x_0\leqq\dfrac{b}{a}x_0$ $(x_0\geqq 0)$ のとき　$\dfrac{b}{a}x_0<y_0<\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+{x_0}^2}$

このとき，⑤は 2 個の異なる実数解をもつ。

(ii)　$-\dfrac{b}{a}x_0 > \dfrac{b}{a}x_0\ (x_0 < 0)$ のとき　$-\dfrac{b}{a}x_0 < y_0 < \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+{x_0}^2}$

このとき，⑤は 2 個の異なる実数解をもつ。

(i)(ii)より，異なる 2 点における接線①と②の交点 $(x,\ y)$ の条件は，

$$\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}\ (x \geqq 0),\ -\frac{b}{a}x < y < \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}\ (x < 0)$$

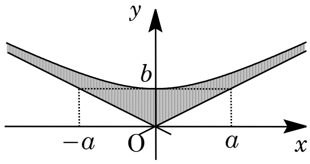
ここで，境界線 $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ に対し，$y > 0$ のもとで $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(a^2+x^2)$ となり，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\ \ (y > 0)\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，⑥は漸近線が $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ である双曲線の上側の枝を表す。

以上より，接線①と②の交点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を図示すると，右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まない。



(3)　まず，網点部内の点 $(p,\ q)$ を通る接線は 2 本である。

そこで，この 2 本の接線の双曲線 C 上の接点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とおくと，接線の方程式は，①②から，

$$y = \frac{b}{a\sqrt{a^2+{x_1}^2}}(x_1x+a^2),\ \ y = \frac{b}{a\sqrt{a^2+{x_2}^2}}(x_2x+a^2)$$

ともに，点 $(p,\ q)$ を通ることより，

$$q = \frac{b}{a\sqrt{a^2+{x_1}^2}}(x_1p+a^2),\ \ q = \frac{b}{a\sqrt{a^2+{x_2}^2}}(x_2p+a^2)$$

$$q\sqrt{a^2+{x_1}^2} = \frac{b}{a}(x_1p+a^2),\ \ q\sqrt{a^2+{x_2}^2} = \frac{b}{a}(x_2p+a^2)$$

ここで，$y_1 = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+{x_1}^2}$，$y_2 = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+{x_2}^2}$ を代入すると，

$$qy_1 = \frac{b^2}{a^2}(px_1+a^2)\cdots\cdots⑦,\ \ qy_2 = \frac{b^2}{a^2}(px_2+a^2)\cdots\cdots⑧$$

そこで，x, y の 1 次式 $qy = \dfrac{b^2}{a^2}(px+a^2)$ ……⑨を考えると，⑨は直線を表し，しかも⑦⑧から接点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ をともに通過する。

よって，点 $(p,\ q)$ を通る C の接線の接点を通る直線の方程式は，⑨から，

$$y = \frac{b^2}{a^2q}(px+a^2)$$

［解 説］

双曲線を題材にした問題です。初めに，曲線 C の式を変形して双曲線の式を導き，接線の公式を利用する手もあります。すると，(3)は有名問題の有名解法に対応します。