1

解答解説のページへ

正の整数に関する条件

(＊)　10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(＊)を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{が条件}(*)\text{を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{が条件}(*)\text{を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xy 平面上の楕円 $E : \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を実数とする。直線 $l : y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a, b の条件を求めよ。

(2)　実数 $a,\ b,\ c$ に対して，直線 $l : y=ax+b$ と直線 $m : y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし，$b>c$ とする。直線 l と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする。このとき，等式 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が成り立つための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

3　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2)　正の整数 n に対して，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ とおく。このとき，$n\geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ であることを示せ。

(3)　a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって，$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

xy 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2) 円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\ y \geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　k を正の整数とし，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の整数，すなわち 10 進法で k 桁の整数のうち，どの位にも数字 9 が現れないものは，最高位が 1 から 8 までの数，その他の位が 0 から 8 までの数である。

これより，その個数 a_k は，$a_k = 8\cdot 9^{k-1}$ となる。

(2)　正の整数 n に対して b_n を，n のどの位にも数字 9 が現れないとき $b_n = \dfrac{1}{n}$，n のいずれかの位に数字 9 が現れるとき $b_n = 0$ と定義する。

すると，n が 1 桁の数のとき，最大の項は b_1 であり，$b_n \neq 0$ となる項の個数は a_1 より，$b_1 + b_2 + \cdots + b_9 < b_1 \times a_1$ である。

また，n が 2 桁の数のとき，最大の項は b_{10} であり，$b_n \neq 0$ となる項の個数は a_2 より，$b_{10} + b_{11} + \cdots + b_{99} < b_{10} \times a_2$ である。

同様に考えると，n が k 桁の数のとき，最大の項は $b_{10^{k-1}}$ であり，$b_n \neq 0$ となる項の個数は a_k より，$b_{10^{k-1}} + b_{10^{k-1}+1} + \cdots + b_{10^k-1} < b_{10^{k-1}} \times a_k$ であるので，

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < \sum_{n=1}^{k} (b_{10^{n-1}} \times a_n) = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{10^{n-1}} \times 8\cdot 9^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{k} 8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{8\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}}{1-\frac{9}{10}} = 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80$$

［解　説］

数列の和に関する問題ですが，定義を理解し，(1)と(2)の関連について把握することが重要です。とはいえ，(2)で用いた不等式について，最初，評価が甘すぎるのではないかと疑ったのですが……。

2　　　　問題のページへ

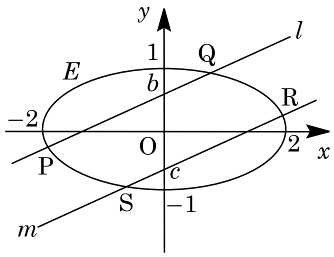
(1)　楕円 $E : \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $l : y=ax+b$ を連立して,

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1,\ (4a^2+1)x^2+8abx+4b^2-4=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

E と l が異なる 2 点を共有するので, $D/4=16a^2b^2-(4a^2+1)(4b^2-4)>0$ より,

$$4(4a^2-b^2+1)>0,\ 4a^2-b^2+1>0 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　②のもとで, E と l の共有点を $\mathrm{P}(p,\ ap+b)$, $\mathrm{Q}(q,\ aq+b)$ $(p<q)$ とおく。



すると, ①の解が $x=\dfrac{-4ab\pm2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$ より,

$$q-p=\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \cdots\cdots\cdots ③$$

また, E と直線 $m : y=ax+c$ が異なる 2 点を共有し,

その共有点を $\mathrm{S}(s,\ as+c)$, $\mathrm{R}(r,\ ar+c)$ $(s<r)$ とおくと, ③と同様にして,

$$r-s=\frac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}\quad(4a^2-c^2+1>0) \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ より $q-p=r-s$ となり, ③④から $4a^2-b^2+1=4a^2-c^2+1$

$$b^2=c^2,\ (b+c)(b-c)=0$$

$b>c$ から $b+c=0$ となり, ②と合わせると, a, b, c の条件は,

$$4a^2-b^2+1>0,\ c=-b<0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　四角形 PQRS が正方形になるとき, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が必要で, ⑤より $\mathrm{S}(s,\ as-b)$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}=(s-p,\ (as-b)-(ap+b))=(s-p,\ a(s-p)-2b)$ となり, 次に $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ と l の方向ベクトル $\vec{u}=(1,\ a)$ が垂直になり, $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\cdot\vec{u}=0$ より,

$$(s-p)+a^2(s-p)-2ab=0,\ (a^2+1)(s-p)-2ab=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

さて, ①より $p=\dfrac{-4ab-2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$ となり, 同様にすると, ⑤から,

$$s=\frac{-4ac-2\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}=\frac{4ab-2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$$

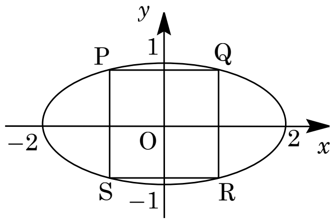
これより, $s-p=\dfrac{8ab}{4a^2+1}$ $\cdots\cdots$ ⑦となり, ⑥に代入すると,

$$(a^2+1)\cdot\frac{8ab}{4a^2+1}-2ab=0,\ 8ab(a^2+1)-2ab(4a^2+1)=0$$

よって, $6ab=0$ となり, $b>0$ から $a=0$ である。

すると, ⑦から $s-p=0$ すなわち $s=p$ となり, ③④より $r=q$ なので,

$$\mathrm{P}(p,\ b),\ \mathrm{Q}(q,\ b),\ \mathrm{S}(p,\ -b),\ \mathrm{R}(q,\ -b)$$



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=(0,\ -2b)$ となり，③から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-p,\ 0)=\left(4\sqrt{-b^2+1},\ 0\right)$$

これより，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|=|-2b|=2b$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=4\sqrt{-b^2+1}$ となり，さらに$\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$から，

$$2b=4\sqrt{-b^2+1},\ b^2=4(-b^2+1),\ 5b^2=4$$

$b>0$ から，$b=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となり，$p=-2\sqrt{-\dfrac{4}{5}+1}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，さらに③から，

$$q=p+4\sqrt{-b^2+1}=p+2b=-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

以上より，楕円 E 上の 4 点を頂点とする正方形 PQRS について，

$$\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \mathrm{S}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

［解 説］

楕円を題材にした標準的な問題です。(3)では，結論は予想できますが，(2)の流れをもとに，平行四辺形→長方形→正方形として処理をしています。丁寧に記述すると，やや面倒ですが。

3

問題のページへ

(1)　$(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}=(n+1)\cdot\dfrac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!\,n!}=n\cdot\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$

よって，$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ ………①

すると，①の右辺 $(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ は $n+1$ の倍数なので，左辺 $n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n$ も $n+1$ の倍数である。そして，$n+1$ と n は互いに素なので，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数となる。

(2)　$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ に対し，$n\geqq 4$ のとき $a_n>n+2$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=4$ のとき　$a_4=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5}=\dfrac{70}{5}=14$ より，$a_4>4+2$ が成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>k+2$ が成立すると仮定する。

すなわち，$\dfrac{(2k)!}{k!\,(k+1)!}>k+2$，$\dfrac{(2k)!}{k!\,(k+2)!}>1$ が成立するとき，

$$a_{k+1}-(k+3)=\frac{{}_{2(k+2)}\mathrm{C}_{k+1}}{k+2}-(k+3)=\frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+2)!}-(k+3)$$

$$=\frac{(2k)!}{k!\,(k+2)!}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}-(k+3)>1\cdot 2(2k+1)-(k+3)=3k-1>0$$

よって，$a_{k+1}>k+3$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 4$ のとき $a_n>n+2$ である。

(3)　$a_1=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$，$a_2=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{3}=\dfrac{6}{3}=2$，$a_3=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{4}=\dfrac{20}{4}=5$ となり，

$$a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+2)!}=\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{2(2n+1)}{n+2}a_n$$

$$(n+2)a_{n+1}=2(2n+1)a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

a_{n+1} は整数なので，②から $2(2n+1)a_n$ は $n+2$ の倍数になる。

さて，$n\geqq 4$ のとき，a_n が素数と仮定すると，(2)から $a_n>n+2$ なので a_n と $n+2$ は互いに素となり，$2(2n+1)$ が $n+2$ の倍数である。そこで，m を整数として，

$$2(2n+1)=(n+2)m,\quad m=\frac{2(2n+1)}{n+2}=4-\frac{6}{n+2}$$

$n\geqq 4$ において，m が整数であるのは $n=4$ のときだけであるが，$a_4=14$ は素数でない。これより，$n\geqq 4$ のとき a_n は素数ではない。

以上より，a_n が素数となるのは，$n=2$，3 のときである。

［解　説］

二項係数を題材にした整数問題です。(3)は(2)のプロセスおよび結果を参考にして，a_{n+1} と a_n の関係を求めました。

4

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ のとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ であり，

$$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \mathrm{BC}^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\mathrm{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{a},\ \mathrm{AD}^2=|\vec{d}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{d}$$

$$\mathrm{BD}^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{d},\ \mathrm{CD}^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{d}$$

ここで，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ より，

$$\begin{aligned}F&=4(3-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})-6(3-\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-6-4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+6(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-2\{3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})-3(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\}\\&=-2\{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}\}=-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})\end{aligned}$$

よって，$k=-2$ となる。

(2) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおくと，(1)より，$F=-2(|\vec{p}|^2-3\vec{p}\cdot\vec{d})$ となり，

$$F=-2|\vec{p}|^2+6\vec{d}\cdot\vec{p}=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}|\vec{d}|^2=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}$$

すると，$F\leqq\frac{9}{2}$ となり，等号成立は $\vec{p}=\frac{3}{2}\vec{d}$ のとき，すなわち $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$ を満たす場合で，例えば $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，$\vec{c}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$ とすればよい。

したがって，F の最大値 M は $M=\frac{9}{2}$ である。

(3) $\vec{c}=\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$ のとき，$F=M$ では $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$ から，

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}=\frac{3}{2}(1,\ 0,\ 0)-\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)=\left(\frac{7}{4},\ -\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{49}{16}+\frac{15}{16}=4$ となり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと，

$$2+2\cdot1^2\cdot\cos\theta=4,\ \cos\theta=1$$

よって，$\theta=0$ から $\vec{a}=\vec{b}$ となり，(*)より $\vec{a}=\vec{b}=\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$ なので，

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$$

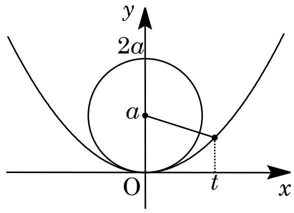
［解　説］

空間ベクトルの応用題です。(3)では，(*)だけで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分が決まるように，数値が設定されていました。なお，(2)の等号成立の例は，(3)の結論でも構いません。

5

問題のページへ

(1)　円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$ が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれる条件は，C の中心 $(0,\ a)$ と曲線 $y=x^2$ 上の任意の点 $(t,\ t^2)$ との距離が，C の半径 a 以上であることより，



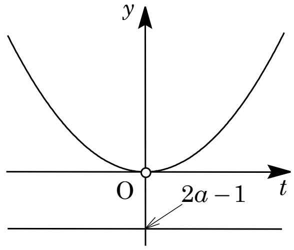
$$t^2+(t^2-a)^2 \geqq a^2,\ t^4-(2a-1)t^2 \geqq 0$$

$$t^2\{t^2-(2a-1)\} \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①は $t=0$ では成立するので，$t \neq 0$ のとき $t^2>0$ から，

$$t^2-(2a-1) \geqq 0,\ t^2 \geqq 2a-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②が成立する a の範囲は，右図より，



$$2a-1 \leqq 0,\ a \leqq \frac{1}{2}$$

よって，$a>0$ と合わせて，$0<a \leqq \frac{1}{2}$ である。

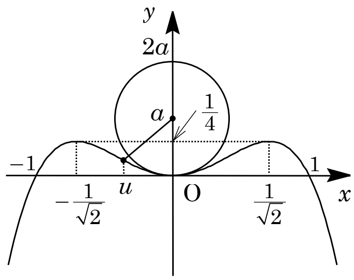
(2)　曲線 $y=x^2-x^4$ は y 軸対称であり，

$$y'=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$$

これより，$x \geqq 0$ における y の増減は右表のようになり，曲線の概形は右下図の通りである。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

さて，円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれる条件は，(1)と同様に，C の中心 $(0,\ a)$ と曲線 $y=x^2-x^4$ 上の任意の点 $(u,\ u^2-u^4)$ との距離が，C の半径 a 以上であることより，



$$u^2+(u^2-u^4-a)^2 \geqq a^2$$

$$u^2+(u^2-u^4)^2-2a(u^2-u^4) \geqq 0$$

$$u^8-2u^6+(2a+1)u^4-(2a-1)u^2 \geqq 0$$

$$u^2\{u^6-2u^4+(2a+1)u^2-(2a-1)\} \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③は $u=0$ では成立するので，$u \neq 0$ のとき $u^2>0$ から，

$$u^6-2u^4+(2a+1)u^2-(2a-1) \geqq 0$$

さらに，$v=u^2>0$ とおくと，$v^3-2v^2+(2a+1)v-(2a-1) \geqq 0$ となり，

$$v^3-2v^2+v+1 \geqq -2a(v-1) \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$f(v)=v^3-2v^2+v+1\ (v>0)$ とおくと，

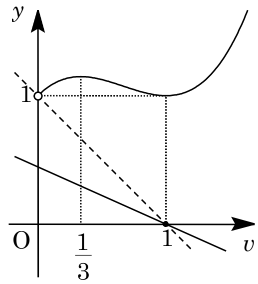
$$f'(v)=3v^2-4v+1$$

$$=(3v-1)(v-1)$$

すると，$f(v)$ の増減は右表のようになり，$y=f(v)$ のグラフは右下図の通りである。

v	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(v)$		$+$	0	$-$	0	
$f(v)$	1	↗	$\frac{31}{27}$	↘	1	↗

さて，直線 $y=-2a(v-1)$ は，定点 $(1,\ 0)$ を通り，傾きが $-2a$ である。



そこで，$y=f(v)\ (v>0)$ のグラフとこの直線との位置関係を考えると，④が成立する $a>0$ の範囲は，右図より，

$$-1\leqq -2a<0,\ 0<a\leqq \frac{1}{2}$$

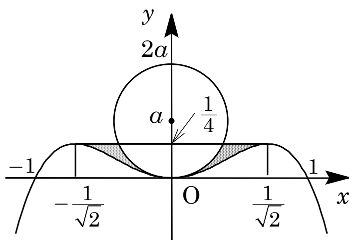
(3)　まず，連立不等式 $|x|\leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$，$0\leqq y\leqq \frac{1}{4}$，$y\geqq x^2-x^4$ で表される領域を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 U は，

$$U=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}-2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x(x^2-x^4)\,dx=\frac{\pi}{8}-2\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{8}-2\pi\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{48}\right)=\frac{\pi}{24}$$

そこで，$0<a\leqq\frac{1}{2}$ において，領域 D : $|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$，$0\leqq y\leqq\frac{1}{4}$，$y\geqq x^2-x^4$，$x^2+(y-a)^2\geqq a^2$ を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

(i)　$2a\geqq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right)$ のとき



$$V=U-\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\{a^2-(y-a)^2\}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{24}-\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(-y^2+2ay)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{24}-\pi\left[-\frac{y^3}{3}+ay^2\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{192}-\frac{a}{16}\pi=\left(\frac{3}{64}-\frac{a}{16}\right)\pi$$

(ii)　$2a<\frac{1}{4}\left(0<a<\frac{1}{8}\right)$ のとき

半径 a の球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$ より，$V=U-\frac{4}{3}\pi a^3=\left(\frac{1}{24}-\frac{4}{3}a^3\right)\pi$

［解 説］

回転体の体積を求める問題です。頻出題の(1)に違和感を抱きつつ上の解答例を作成したのですが，これには $x^2\geqq x^2-x^4$ という伏線がありました。この点を利用すると，(2)は $a>\frac{1}{2}$ の場合だけを調べればよいことになり，記述量を減らすことができます。つまり，設問(1)はノイズではなかったわけです。