1

解答解説のページへ

n を自然数とする。整数 i, j に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_{i,j}$ の座標を

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}i+\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}i+\sin\frac{2\pi}{n}j\right)$$

で与える。さらに，i，j を動かしたとき，$\mathrm{P}_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数を S_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_{0,0}\mathrm{P}_{0,1}\mathrm{P}_{0,2}$ および $\triangle\mathrm{P}_{1,0}\mathrm{P}_{1,1}\mathrm{P}_{1,2}$ を同一座標平面上に図示せよ。

(2)　S_4 を求めよ。

(3)　平面上の異なる 2 点 A，B に対して，$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=1$ であるような同一平面上の点 Q はいくつあるか。$\mathrm{AB}=d$ の値で場合分けして答えよ。

(4)　S_n を n を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上の放物線 $P : y^2 = 4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり, A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A , n_B とする。a を正の数として, 点 A の座標を $(a,\ \sqrt{4a})$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) n_A の方程式を a を用いて表せ。

(2) 直線 AB と直線 $y = \sqrt{4a}$ とがなす角の二等分線のひとつが, n_A に一致するとき, 直線 AB の方程式を a を用いて表せ。

(3) (2)のとき, 点 B を通る直線 r_B を考える。r_B と直線 AB とがなす角の二等分線のひとつが, n_B に一致するとき, r_B の方程式を a を用いて表せ。

(4) (3)のとき, 直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし, P と直線 $y = \sqrt{4a}$, 直線 $x = -1$ および(3)の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。a を変化させたとき, $\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

曲線$C : y = f(x)$ $(0 \leqq x < 1)$が次の条件を満たすとする。

・$f(0) = 0$

・$0 < x < 1$のとき$f'(x) > 0$

・$0 < a < 1$を満たすすべての実数aについて，曲線C上の点$\mathrm{P}(a,\ f(a))$における接線と直線$x = 1$との交点をQとするとき，$\mathrm{PQ} = 1$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) f'(x) dx$の値を求めよ。

(3)　曲線Cとx軸，直線$x = 1$，直線$y = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$で囲まれた図形の面積を求めよ。

1　　問題のページへ

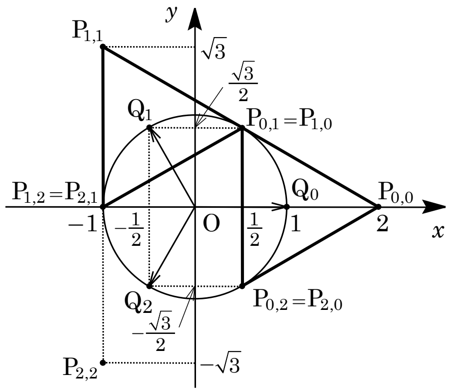
(1)　点 $P_{i,j}\left(\cos\frac{2\pi}{n}i+\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}i+\sin\frac{2\pi}{n}j\right)$ に対し，点 $Q_i\left(\cos\frac{2\pi}{n}i,\ \sin\frac{2\pi}{n}i\right)$，点 $Q_j\left(\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}j\right)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP_{i,j}}=\overrightarrow{OQ_i}+\overrightarrow{OQ_j}$$

$n=3$ のとき，$0\leqq i<3$，$0\leqq j<3$ として，

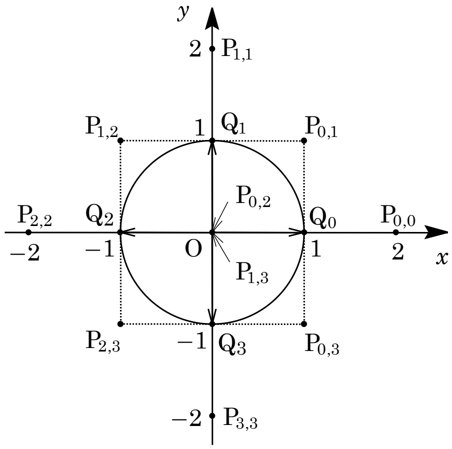
$Q_0(1,\ 0)$，$Q_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$Q_2\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

であるので，これより点 $P_{i,j}$ を描くと右図のようになる。



よって，$\triangle P_{0,0}P_{0,1}P_{0,2}$ と $\triangle P_{1,0}P_{1,1}P_{1,2}$ は太線で表される三角形である。

(2)　$n=4$ のとき，$P_{i,j}=P_{j,i}$ に注意すると，$0\leqq i\leqq j<4$ として，点 $P_{i,j}$ を描くと右図のようになる。



(i)　$i=j$ のとき　$(i,\ j)$ は ${}_4C_1=4$ 通り。

すると，異なる $P_{i,j}$ は 4 個である。

(ii)　$i<j$ のとき　$(i,\ j)$ は ${}_4C_2=6$ 通り。

(ii-i)　$j=i+2$ のとき

$(i,\ j)$ は $(0,\ 2)$，$(1,\ 3)$ から 2 通りとなり，$P_{0,2}=P_{1,3}=O$ より異なる $P_{i,j}$ は 1 個である。

(ii-ii)　$j\neq i+2$ のとき

$(i,\ j)$ は $6-2=4$ 通りとなり，異なる $P_{i,j}$ は 4 個である。

(i)(ii)より，$P_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数 S_4 は，$S_4=4+1+4=9$ である。

(3)　線分 AB の端点 A および B を中心として半径 1 の円を描き，この 2 円の共有点を Q とおく。ここで，$AB=d$ とし，d の値で場合分けすると，点 Q の個数は，

$0<d<2$ のとき 2 個，$d=2$ のとき 1 個，$d>2$ のとき 0 個

(4)　$\overrightarrow{OP_{i,j}}=\overrightarrow{OQ_i}+\overrightarrow{OQ_j}$ $(0\leqq i\leqq j<n)$ のとき，異なる $P_{i,j}$ の個数は，

(a)　n が 3 以上の奇数であるとき

(a-i)　$i=j$ のとき　$(i,\ j)$ は ${}_nC_1=n$ 通りあり，異なる $P_{i,j}$ は n 個ある。

(a-ii)　$i<j$ のとき

$(i,\ j)$ は ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$ 通りあり，このとき $0<Q_iQ_j<2$ より，点 Q_i，Q_j から距離が 1 の点は 2 つある。その 1 つが原点，もう 1 つが $P_{i,j}$ である。

これより，異なる $\mathrm{P}_{i,j}$ は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個ある。

(a-i)(a-ii)より，異なる $\mathrm{P}_{i,j}$ は $n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$ 個ある。

なお，この式は $n=1$ のときも成り立っている。

(b)　n が偶数であるとき

(b-i)　$i=j$ のとき　$(i,\ j)$ は ${}_n\mathrm{C}_1=n$ 通りあり，異なる $\mathrm{P}_{i,j}$ は n 個ある。

(b-ii)　$i<j$ のとき　$(i,\ j)$ は ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りある。

・$j=i+\dfrac{n}{2}$ のとき　$(i,\ j)$ は $\left(0,\ \dfrac{n}{2}\right)$，$\left(1,\ \dfrac{n}{2}+1\right)$，$\cdots$，$\left(\dfrac{n}{2}-1,\ n-1\right)$ で $\dfrac{n}{2}$ 通りある。

このとき $\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j=2$ より，点 Q_i，Q_j から距離が 1 の点は 1 つある。そして，いずれの $\mathrm{P}_{i,j}$ も原点である。

・$j\neq i+\dfrac{n}{2}$ のとき　$(i,\ j)$ は $\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{n}{2}=\dfrac{n^2-2n}{2}$ 通りある。

このとき $0<\mathrm{Q}_i\mathrm{Q}_j<2$ より，点 Q_i，Q_j から距離が 1 の点は 2 つある。その 1 つが原点，もう 1 つが $\mathrm{P}_{i,j}$ である。

(b-i)(b-ii)より，異なる $\mathrm{P}_{i,j}$ は $n+1+\dfrac{n^2-2n}{2}=\dfrac{n^2+2}{2}$ 個ある。

(a)(b)より，$\mathrm{P}_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数 S_n は，

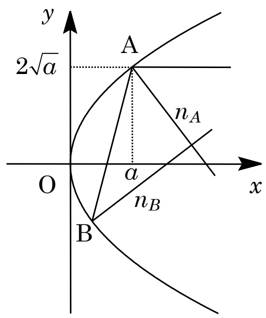
$$S_n=\frac{n^2+n}{2}\ (n\text{ が奇数}),\quad S_n=\frac{n^2+2}{2}\ (n\text{ が偶数})$$

［解 説］

点の座標に関する場合の数の問題です。(4)は，(3)までが誘導となっているものの，注意深さと表現力がかなり要求されます。

2

問題のページへ



(1)　放物線 $P: y^2 = 4x$ ……①に対し，$2y\dfrac{dy}{dx} = 4$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad (y \neq 0)$$

さて，P 上の点 $\mathrm{A}(a,\ 2\sqrt{a})$ における法線 n_A は，その法線ベクトルの成分を $\left(1,\ \dfrac{2}{2\sqrt{a}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{a},\ 1)$ とすると，その方程式は，$\sqrt{a}(x-a)+1\cdot(y-2\sqrt{a})=0$ となり，

$$\sqrt{a}x + y - (a+2)\sqrt{a} = 0$$

(2)　直線 AB の単位方向ベクトルの成分を $(p,\ q)$ $(p^2+q^2=1,\ q<0)$ とおく。

また，n_A の方向ベクトルの成分を $(1,\ -\sqrt{a})$，直線 $y=2\sqrt{a}$ の方向ベクトルの成分を $(1,\ 0)$ とすると，n_A は直線 AB と直線 $y=2\sqrt{a}$ とがなす角の二等分線の 1 つより，$(p,\ q)+(1,\ 0)=k(1,\ -\sqrt{a})$ $(k>0)$ と表せ，

$$p+1=k,\ q=-\sqrt{a}k$$

これより，$q=-\sqrt{a}(p+1)$ となり，$k>0$ から $p+1>0$ であり，$p^2+q^2=1$ より，

$$p^2+a(p+1)^2=1,\ (p+1)(p-1)+a(p+1)^2=0$$

すると，$(p-1)+a(p+1)=0$ より，$(a+1)p+a-1=0$ となり，

$$p=-\frac{a-1}{a+1},\ q=-\sqrt{a}\left(-\frac{a-1}{a+1}+1\right)=-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}$$

これより，$(p,\ q)=-\dfrac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})$ となり，直線 AB は，法線ベクトルの成分を $(2\sqrt{a},\ -a+1)$ とすると，その方程式は，

$$2\sqrt{a}(x-a)+(-a+1)(y-2\sqrt{a})=0,\ 2\sqrt{a}x-(a-1)y-2\sqrt{a}=0 \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①②を連立すると，$2\sqrt{a}\cdot\dfrac{y^2}{4}-(a-1)y-2\sqrt{a}=0$ より，

$$\sqrt{a}y^2-2(a-1)y-4\sqrt{a}=0,\ (y-2\sqrt{a})(\sqrt{a}y+2)=0$$

点 B は，$y\neq 2\sqrt{a}$ から $y=-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ となり，$x=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{a}=\dfrac{1}{a}$ より $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ -\dfrac{2}{\sqrt{a}}\right)$ である。

さて，点 B を通る直線 r_B の単位方向ベクトルの成分を $(s,\ t)$ $(s^2+t^2=1,\ s>0)$ とおく。直線 AB の単位方向ベクトルの成分は $(-p,\ -q)=\dfrac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})$，$n_B$ の法線ベクトルの成分は $\left(1,\ -\dfrac{2\sqrt{a}}{2}\right)=(1,\ -\sqrt{a})$ から方向ベクトルの成分を $(\sqrt{a},\ 1)$ とすることができる。

そして，n_B は r_B と直線 AB とがなす角の二等分線の 1 つより，

$$\frac{1}{a+1}(a-1,\ 2\sqrt{a})+(s,\ t)=l(\sqrt{a},\ 1) \quad (l>0)$$

すると，$\dfrac{a-1}{a+1}+s=\sqrt{a}l$，$\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}+t=l$ から，$\dfrac{a-1}{a+1}+s=\dfrac{2a}{a+1}+\sqrt{a}t$ となり，

$$s=\sqrt{a}t+1$$

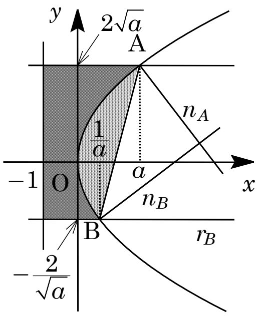
$l>0$ から $\dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}+t>0$ であり，$s^2+t^2=1$ より，

$$(\sqrt{a}t+1)^2+t^2=1,\ (a+1)t^2+2\sqrt{a}t=0,\ t\{(a+1)t+2\sqrt{a}\}=0$$

$(a+1)t+2\sqrt{a}>0$ から $t=0$ となり，このとき $s=1$ から，$(s,\ t)=(1,\ 0)$

よって，r_B の方程式は，$y=-\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ である。

(4)　直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1，P と直線 $y=2\sqrt{a}$，直線 $x=-1$ および r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，



$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\left\{(a+1)+\left(\frac{1}{a}+1\right)\right\}\left(2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$$
$$=\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$$

また，②より，AB : $x=\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1$ となり，

$$S_1=\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}\left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}y+1-\frac{y^2}{4}\right)dy=-\frac{1}{4}\int_{-\frac{2}{\sqrt{a}}}^{2\sqrt{a}}(y-2\sqrt{a})\left(y+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)dy$$
$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^3=\frac{8}{24}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$$

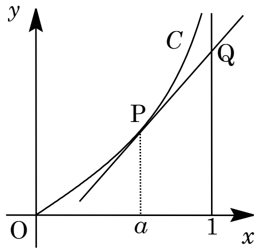
これより，$S_2=\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^3-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^3=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値は $\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

放物線の有名な性質を題材にした問題です。角の二等分線の扱いについては，いろいろな方法がありますが，場合分けを避けたかったので，解答例では，ひし形の対角線の性質を利用してベクトルで処理しました。ただ，計算量を考えるとタンジェントの方がよかったかもしれません。なお，(4)の結論は……。

3

問題のページへ



(1)　$f(0)=0$ かつ $0<x<1$ で $f'(x)>0$ を満たす曲線 $C: y=f(x)\ (0\leqq x<1)$ に対し，条件より，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))\ (0<a<1)$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき，$\mathrm{PQ}=1$ が成り立つ。

直線 PQ の傾きは $f'(a)$ より，$(1-a)\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}=1$

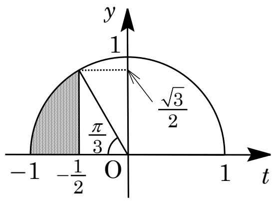
$$1+\{f'(a)\}^2=\frac{1}{(1-a)^2},\ \{f'(a)\}^2=\frac{2a-a^2}{(1-a)^2}$$

よって，$f'(a)=\dfrac{\sqrt{2a-a^2}}{1-a}$ となり，a は $0<a<1$ を満たす任意の実数なので,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}$$

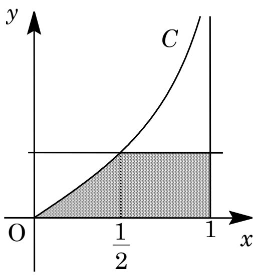
(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{-(x-1)^2+1}\,dx$ とする。

ここで，$x-1=t$ とおき，右図を参照すると，



$$I=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(3)　曲線 C と x 軸，直線 $x=1$，直線 $y=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\left(1-\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

ここで，(2)より，

$$I=\Big[(1-x)f(x)\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$$

したがって，$S=I=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ である。

［解　説］

抽象関数が題材の微積分の総合問題です。(3)は(2)が誘導と感じられますが，実際その通りでした。