1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする。$a,\ b$ が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

3 つの正の整数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は 1 であることを示せ。

(2)　$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a)　時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b)　点 P は第 1 象限内にある。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3)　xy 平面内において，連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。

4

解答解説のページへ

a は正の実数とする。複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \dfrac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\dfrac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　K が円となるための a の条件を求めよ。また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ。

(2)　a が(1)の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a は$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$を満たす実数とし，$f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の等式$(*)$を満たすaがただ1つ存在することを示せ。

$$(*) \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$を満たす実数b, cについて，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 次の試行を考える。

［試行］n個の数$1, 2, \cdots, n$を出目とする，あるルーレットをk回まわす。

この［試行］において，各$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$についてiが出た回数を$S_{n,\,k,\,i}$とし，

$$(**) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{S_{n,\,k,\,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする。このとき，(1)の等式$(*)$が成り立つことを示せ。

(4) (3)の［試行］において出た数の平均値を$A_{n,\,k}$とし，$A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n,\,k}$とする。$(**)$が成り立つとき，極限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n}$を$a$を用いて表せ。

1　問題のページへ

実数 a, b が, $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq 1$ を満たすとき, $f(z) = z^2 + az + b$ に対し, $f(z) = 0$ の解を $z = x + yi$ とおくと, $(x+yi)^2 + a(x+yi) + b = 0$ から,

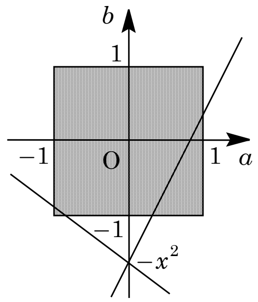
$$(x^2 - y^2 + ax + b) + (2x + a)yi = 0$$

すると, $x^2 - y^2 + ax + b = 0$ ……①, $(2x + a)y = 0$ ……②が成り立ち, ②より,

(i)　$y = 0$ のとき

①から, $x^2 + ax + b = 0$ となり, $b = -xa - x^2$ ………③

ここで, $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq 1$ のとき, x のとりうる範囲は, ab 平面上で直線③が右図の網点部の領域 $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq 1$ と共有点をもつ x の条件に対応し,



(i-i)　$-1 \leqq -x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ のとき

直線③は, つねに網点部と共有点をもつ。

(i-ii)　$-x^2 < -1$ $(x < -1,\ 1 < x)$ のとき

直線③は $(a,\ b) = (1,\ -x - x^2)$ および $(a,\ b) = (-1,\ x - x^2)$ を通ることより, 網点部と共有点をもつ条件は, $-x - x^2 \geqq -1$ ……④または $x - x^2 \geqq -1$ ……⑤である。

④より, $x^2 + x - 1 \leqq 0$ となり, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

⑤より, $x^2 - x - 1 \leqq 0$ となり, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって, $x < -1$, $1 < x$ と合わせると, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < -1$, $1 < x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(i-i)(i-ii)より, 求める条件は $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(ii)　$y \neq 0$ のとき

②から $2x + a = 0$ となり, $a = -2x$ ………⑥

⑥を①に代入すると, $x^2 - y^2 - 2x^2 + b = 0$ から, $b = x^2 + y^2$ ………⑦

ここで, $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq 1$ より, $|-2x| \leqq 1$, $|x^2 + y^2| \leqq 1$ となり,

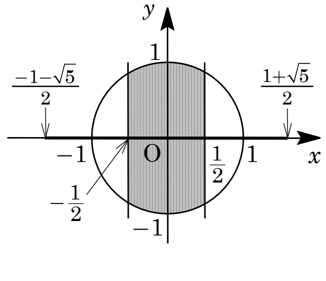
$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2},\quad x^2 + y^2 \leqq 1$$

(i)(ii)より, $z = x + yi$ のとりうる値の範囲は,

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad y = 0$$

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2},\quad x^2 + y^2 \leqq 1,\quad y \neq 0$$

これを複素数平面上に図示すると, 右図の太線部および網点部になる。ただし, 境界は領域に含む。



［解 説］

複素数と 2 次方程式のついての標準的な問題です。初めは，方程式の解を実数と虚数に分け，解の公式を利用して処理をしましたが，記述量がかなり多めになりました。そこで，方針を変更したのが，上の解答例です。

2

問題のページへ

(1)　最大公約数が 1 の正の整数 a, b, c に対し，g を素数，l, m, n を正の整数として，次式①②③を仮定する。

$$a+b+c=gl\cdots\cdots①,\ bc+ca+ab=gm\cdots\cdots②,\ abc=gn\cdots\cdots③$$

まず, ③から a, b, c の少なくとも 1 つは g の倍数となる。

ここで, 対称性から a が g の倍数と仮定すると，$a=gk$ (k は整数) と表すことができ, ①から $b+c=g(l-k)\cdots\cdots④$, ②から $bc=g(m-bk-ck)\cdots\cdots⑤$

次に, ⑤から b, c の少なくとも 1 つは g の倍数となる。

ここで, 対称性から b が g の倍数と仮定すると，$b=gj$ (j は整数) と表すことができ, ④から $c=g(l-k-j)$ となる。

すると, 整数 a, b, c は公約数 g をもち, 最大公約数が 1 であることに反する。

よって，$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc は素数の因数の最大公約数をもたない, すなわち最大公約数は 1 である。

(2)　$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)$ より，$a^2+b^2+c^2$ と $a+b+c$ の最大公約数は，$a+b+c$ と $2(bc+ca+ab)$ の最大公約数に等しい。

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3abc$ より，$a^3+b^3+c^3$ と $a+b+c$ の最大公約数は，$a+b+c$ と $3abc$ の最大公約数に等しい。

したがって，$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数は，$a+b+c$，$2(bc+ca+ab)$，$3abc$ の最大公約数に一致する。

さて，$P=a+b+c$，$Q=bc+ca+ab$，$R=abc$ とおくと, (1)の結論より, P, Q, R の最大公約数は 1 である。

このとき，P，$2Q$，$3R$ の最大公約数を G とおくと, まず G は 2 と 3 以外の素因数をもたない。また i を 2 以上の整数として, G が 2^i や 3^i の因数をもつならば, P, Q, R の最大公約数は 1 ではない。

これより, G のとりうる値は 1, 2, 3, 6 のみであり, 以下, その十分性を調べる。

(i)　$G=6$ となる場合

P は 6 の倍数, Q は 2 の倍数でない 3 の倍数, R は 3 の倍数でない 2 の倍数を考える。たとえば, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき $(P,\ Q,\ R)=(6,\ 9,\ 4)$ となり, このとき $(P,\ 2Q,\ 3R)=(6,\ 18,\ 12)$ から，$G=6$ である。

(ii)　$G=3$ となる場合

P は 3 の倍数, Q は 3 の倍数, R は 3 の倍数でない数を考える。たとえば, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき $(P,\ Q,\ R)=(3,\ 3,\ 1)$ となり，このとき $(P,\ 2Q,\ 3R)=(3,\ 6,\ 3)$ から，$G=3$ である。

(iii)　$G=2$ となる場合

P は 2 の倍数, Q は 2 の倍数でない数, R は 2 の倍数を考える。たとえば, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき $(P,\ Q,\ R)=(4,\ 5,\ 2)$ となり，このとき $(P,\ 2Q,\ 3R)=(4,\ 10,\ 6)$ から, $G=2$ である。

(iv)　$G=1$ となる場合

(i), (ii), (iii) 以外の場合を考える。たとえば, $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき $(P,\ Q,\ R)=(5,\ 7,\ 3)$ となり, このとき $(P,\ 2Q,\ 3R)=(5,\ 14,\ 9)$ から, $G=1$ である。

(i)～(iv)より, G のとりうる値は 1, 2, 3, 6 である。

以上より，$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数は 1, 2, 3, 6 である。

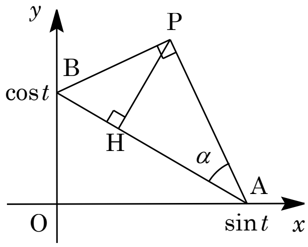
［解 説］

難しめの整数問題です。誘導がないので, 方針を決めるのに難儀しますが, (1)では素数を設定すること, (2)では互除法の考え方を利用することが要点になっています。ただ, 記述方法もかなり面倒です。

3　問題のページへ

(1)　点 $A(\sin t,\ 0)$，点 $B(0,\ \cos t)$，第 1 象限内の点 P に対し，$\angle A=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\angle P=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 APB について，$AB=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$ から，

$$AP=AB\cos\alpha=\cos\alpha$$



ここで，点 P から辺 AB に垂線を引き，辺 AB との交点を H とおくと，

$$AH=AP\cos\alpha=\cos^2\alpha\,,\ \ PH=AP\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

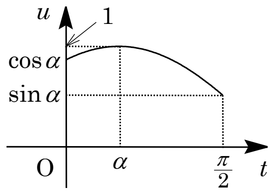
さて，$\overrightarrow{AB}=(-\sin t,\ \cos t)$ から，直線 AB の法線ベクトルを $\vec{n}=(\cos t,\ \sin t)$ とすることができ，$|\vec{n}|=1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{OA}+(\cos^2\alpha)\overrightarrow{AB}+(\sin\alpha\cos\alpha)\vec{n}\\&=(\sin t,\ 0)+\cos^2\alpha(-\sin t,\ \cos t)+\sin\alpha\cos\alpha(\cos t,\ \sin t)\\&=(\sin^2\alpha\sin t+\sin\alpha\cos\alpha\cos t,\ \cos^2\alpha\cos t+\sin\alpha\cos\alpha\sin t)\\&=\bigl(\sin\alpha(\sin\alpha\sin t+\cos\alpha\cos t),\ \cos\alpha(\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\sin t)\bigr)\\&=\bigl(\sin\alpha\cos(t-\alpha),\ \cos\alpha\cos(t-\alpha)\bigr)=\cos(t-\alpha)(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\end{aligned}$$

これより，$P(x,\ y)$ とおくと，$x=\cos(t-\alpha)\sin\alpha$，$y=\cos(t-\alpha)\cos\alpha$

すると，$x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$ ……(＊)となり，点 P は直線上を動く。

(2)　$t=0\to t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$u=\cos(t-\alpha)$ のグラフは右図のようになり，点 P は直線(＊)上を，$\cos\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to\sin\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ と動く。



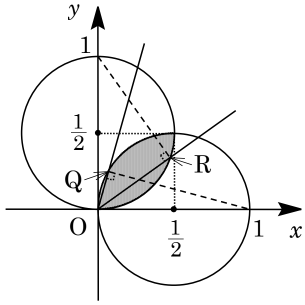
これより，点 P が動く道のり L は，

$$\begin{aligned}L&=|1-\cos\alpha|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+|\sin\alpha-1|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\\&=(1-\cos\alpha)-(\sin\alpha-1)=2-\cos\alpha-\sin\alpha\end{aligned}$$

(3)　連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ に対し，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},\ \ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

すると，この連立不等式で表される領域 D は右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



また，(＊)は $y=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x=\dfrac{1}{\tan\alpha}x=x\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ となり，原点を通り y 軸とのなす角が α の直線を表す。

そして，この直線上を動く点 P と原点 O との距離 OP は，(2)から，

$$OP=\cos\alpha\ \to\ OP=1\ \to\ OP=\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(i)　$0<\alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

直線$(*)$と円$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$の原点以外の交点を Q とすると，

$$\mathrm{OQ}=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

このとき，$\cos\alpha \geqq \sin\alpha$ なので，$(**)$から$\mathrm{OP} \geqq \mathrm{OQ}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

(ii)　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

直線$(*)$と円$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$の原点以外の交点を R とすると，

$$\mathrm{OR}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

このとき，$\sin\alpha>\cos\alpha$ なので，$(**)$から$\mathrm{OP}>\mathrm{OR}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

［解　説］

軌跡と領域に関する問題です。(1)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では直線 AB の法線ベクトルに注目して点 P の座標を求めています。なお，(2)は(3)の巧みな誘導になっています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$|z-1|=a$ ……①かつ $z\neq\frac{1}{2}$ を満たす z に対して，$w=\frac{z-3}{1-2z}$ とおくと，$w(1-2z)=z-3$ から，$(2w+1)z=w+3$ となる。

ここで，$2w+1=0\left(w=-\frac{1}{2}\right)$ とすると成立しないので，$w\neq-\frac{1}{2}$ のもとで，

$$z=\frac{w+3}{2w+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②は $z\neq\frac{1}{2}$ を満たし，これを①に代入して，$\left|\frac{w+3}{2w+1}-1\right|=a$ から $\left|\frac{-w+2}{2w+1}\right|=a$

$$|-w+2|=a|2w+1|,\ \ |w-2|=2a\left|w+\frac{1}{2}\right|\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$2a=1\left(a=\frac{1}{2}\right)$ のとき

③から，点 w は，複素数平面上で点 2 と点 $-\frac{1}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

(ii)　$2a\neq1\left(a\neq\frac{1}{2}\right)$ のとき

③から，$|w-2|^2=4a^2\left|w+\frac{1}{2}\right|^2$ となり，$(w-2)(\overline{w}-2)=4a^2\left(w+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{1}{2}\right)$

$$(4a^2-1)w\overline{w}+(2a^2+2)w+(2a^2+2)\overline{w}+a^2-4=0$$

$4a^2-1\neq0$ から，$w\overline{w}+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\overline{w}+\frac{a^2-4}{4a^2-1}=0$ となり，

$$\left(w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)\left(\overline{w}+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)=\left(\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right)^2-\frac{a^2-4}{4a^2-1}$$

$$\left|w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right|^2=\frac{25a^2}{(4a^2-1)^2},\ \ \left|w+\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\right|=\frac{5a}{|4a^2-1|}\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より，点 w は，複素数平面上で円を描く。

(i)(ii)より，点 w の描く図形 K が円となる条件は，$a>0$ かつ $a\neq\frac{1}{2}$ である。

このとき，円 K の中心は $-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}$，半径は $\frac{5a}{|4a^2-1|}$ である。

(2)　$a>0$ かつ $a\neq\frac{1}{2}$ のとき，複素数平面上で，虚軸に平行で円 K の直径となる線分上に点 $u=x+yi$ があるとき，

$$x=-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ \ -\frac{5a}{|4a^2-1|}\leqq y\leqq\frac{5a}{|4a^2-1|}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$(4a^2-1)x=-2a^2-2$ となり，$(4x+2)a^2=x-2$

ここで，$4x+2=0\left(x=-\frac{1}{2}\right)$ とすると成立しないので，$x\neq-\frac{1}{2}$ のもとで，

$$a^2=\frac{x-2}{4x+2}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$a>0$ かつ $a\neq\dfrac{1}{2}$ のもとで，⑥は $-5a\leqq|4a^2-1|y\leqq 5a$ ，すなわち $(4a^2-1)^2y^2\leqq 25a^2$ と同値なので，⑦を代入すると，

$$\left\{\frac{4(x-2)}{4x+2}-1\right\}^2y^2\leqq\frac{25(x-2)}{4x+2},\ \ \frac{100}{(4x+2)^2}y^2\leqq\frac{25(x-2)}{4x+2}$$

これより，$4y^2\leqq(x-2)(4x+2)$ となり，$x^2-\dfrac{3}{2}x-y^2\geqq 1$ から，

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2\geqq\frac{25}{16}$$

また，$a>0$ かつ $a\neq\dfrac{1}{2}$ なので，$a^2>0$ かつ $a^2\neq\dfrac{1}{4}$ となり，⑦から

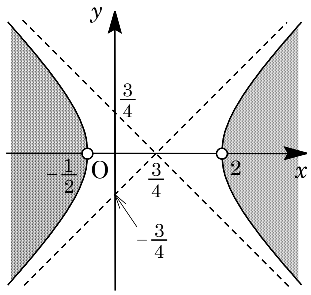
$$\frac{x-2}{4x+2}>0 \text{ かつ } \frac{x-2}{4x+2}\neq\frac{1}{4}$$

すると，$\dfrac{x-2}{4x+2}>0$ は $x<-\dfrac{1}{2}$，$2<x$ となり，$x\neq-\dfrac{1}{2}$ は満たされている。また $\dfrac{x-2}{4x+2}\neq\dfrac{1}{4}$ はつねに成立する。

よって，点 $u=x+yi$ の存在領域は，

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-y^2\geqq\frac{25}{16}\ \left(x<-\frac{1}{2},\ 2<x\right)$$

複素数平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，点 $-\dfrac{1}{2}$ と点 2 以外の境界は含む。



［解　説］

複素数平面上の軌跡と領域についての標準的な問題です。ただ，量的には 2 題分ほどあります。なお，(1)の(ii)の場合は，アポロニウスの円が対応し，この知識を利用する方法も考えられます。

5

問題のページへ

(1)　$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$ に対して，

$$f(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin 2ax\right) = \frac{2}{3}(1 + \sin 2ax)$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \cdots\cdots (*)$ より，$\displaystyle\frac{2}{3}\int_0^1 (1 + \sin 2ax)\,dx = 1$ となり，

$$\frac{2}{3}\left[x - \frac{1}{2a}\cos 2ax\right]_0^1 = 1,\quad \frac{2}{3}\left\{1 - \frac{1}{2a}(\cos 2a - 1)\right\} = 1,\quad -\frac{1}{3a}(\cos 2a - 1) = \frac{1}{3}$$

よって，$\cos 2a + a - 1 = 0$ となり，ここで $g(a) = \cos 2a + a - 1$ とおくと，

$$g'(a) = -2\sin 2a + 1$$

$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ における $g'(a) = 0$ の解は，$\sin 2a = \dfrac{1}{2}$ から $a = \dfrac{\pi}{12}$ となり，$g(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	0	↗		↘	$\frac{\pi}{4} - 1$

すると，$g\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$ から，$(*)$ を満たす a は $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ にただ 1 つ存在する。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq 2ax \leqq 2a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$f'(x) = \dfrac{4}{3}a\cos 2ax \geqq 0$

これより $f(x)$ は単調に増加し，$0 \leqq b < c \leqq 1$ である b，c に対し，$b \leqq x \leqq c$ において $f(b) \leqq f(x) \leqq f(c)$ であるので，

$$\int_b^c f(b)\,dx \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq \int_b^c f(c)\,dx$$

よって，$\displaystyle f(b)(c - b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c - b) \cdots\cdots$①が成り立つ。

(3)　1，2，…，n を出目とするルーレットを k 回まわすとき，$i\,(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が出た回数を $S_{n,k,i}$ とすると，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_{n,k,i} = k$ である。

さて，条件 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx \cdots\cdots (**)$ について，i を 1 から n まで加え，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

また，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}$ は有限な値をとることより，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}S_{n,k,i}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\cdot k = 1$$

よって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \cdots\cdots (*)$ が成り立つ。

(4) 出た数の平均値 $A_{n,\,k}$ は，$A_{n,\,k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k}$ と表せ，(＊＊) より，

$$A_n=\lim_{k\to\infty}A_{n,\,k}=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k}=\sum_{i=1}^{n} i\Big(\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k}\Big)=\sum_{i=1}^{n} i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

ここで，①から，$f\Big(\dfrac{i-1}{n}\Big)\Big(\dfrac{i}{n}-\dfrac{i-1}{n}\Big)\leqq\displaystyle\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx\leqq f\Big(\dfrac{i}{n}\Big)\Big(\dfrac{i}{n}-\dfrac{i-1}{n}\Big)$ となり，

$$\frac{1}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx\leqq\frac{1}{n}f\Big(\frac{i}{n}\Big),\ \ \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\leqq A_n\leqq\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

よって，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\leqq\frac{A_n}{n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i}{n}\Big)$………②

そして，$I_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i}{n}\Big)$，$J_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}I_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i}{n}\Big)=\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x(1+\sin 2ax)\,dx\\&=\frac{2}{3}\Big[x\Big(x-\frac{1}{2a}\cos 2ax\Big)\Big]_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\Big(x-\frac{1}{2a}\cos 2ax\Big)dx\\&=\frac{2}{3}\Big(1-\frac{1}{2a}\cos 2a\Big)-\frac{2}{3}\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4a^2}\sin 2ax\Big]_0^1\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a-\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4a^2}\sin 2a\Big)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{6a^2}\sin 2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}J_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i-1}{n}+\frac{1}{n}\Big)f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\\&\geqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}f\Big(\frac{i-1}{n}\Big)=\int_0^1 xf(x)\,dx\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{6a^2}\sin 2a\end{aligned}$$

したがって，②から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3a}\cos 2a+\frac{1}{6a^2}\sin 2a$ となる。

［解　説］

区分求積法を適用する極限計算です。(3)で，いきなり出現する見慣れない $S_{n,\,k,\,i}$ と条件 (＊＊) には戸惑いますが，(2)の誘導をもとに(4)の結論へと繋げていきます。エネルギーをかなり消費する問題です。なお，(1)の後半は，グラフを描いて示す方法もあります。