1

解答解説のページへ

xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。xy 平面上の相異なる 2 つの格子点を端点とする折れ線のうち，x 座標または y 座標が等しい格子点どうしを結ぶ線分のみから構成され，かつ同じ点を二度通ることはないものを，格子折れ線と呼ぶ。ここで，格子折れ線の向きは考慮せず，端点および通過する点がすべて等しい格子折れ線は同じものとする。また，自然数 n に対し，$0 \leqq x \leqq n$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$ を満たす格子点全体の集合を V_n とする。さらに，V_n に属する格子点をすべて通り，かつ V_n に属さない格子点は通らない格子折れ線全体を L_n とする。たとえば，7 つの格子点 $(0,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を順に結んだ折れ線は L_4 に属する。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　L_1 および L_2 に属する格子折れ線をすべて図示せよ。

(2)　L_4 に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差が 3 以上となるものをすべて図示せよ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，L_n に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差がちょうど $n-2$ となるものの個数を求めよ。

(4)　L_n に属する格子折れ線の個数 l_n を，n を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間において，3 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$ を通る平面 π_1 と，3 点 $(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面 π_2 を考える。$x_0=1$，$y_0=2$，$z_0=-2$ として，点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から始めて，次の手順で点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，…を決める。

- k が偶数のとき，π_1 上の点で点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ からの距離が最小となるものを $\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$ とする。
- k が奇数のとき，π_2 上の点で点 $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ からの距離が最小となるものを $\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$ とする。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) π_2 に直交するベクトルのうち，長さが 1 で x 成分が正のもの $\overrightarrow{n_2}$ を求めよ。

(2) x_{k+1}，y_{k+1}，z_{k+1} をそれぞれ x_k，y_k，z_k を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} y_k$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} z_k$ を求めよ。

3　　解答解説のページへ

a, b を正の実数, p を a より小さい正の実数とし, すべての実数 x について

$$\int_p^{f(x)} \frac{a}{u(a-u)}du = bx\ ,\ \ 0 < f(x) < a$$

かつ $f(0)=p$ を満たす関数 $f(x)$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を a, b, p を用いて表せ。

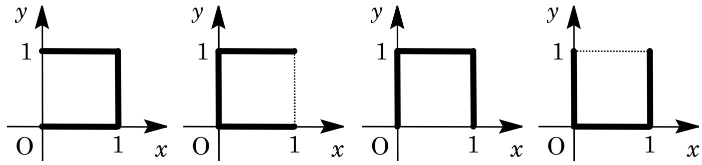
(2)　$f(-1)=\dfrac{1}{2}$, $f(1)=1$, $f(3)=\dfrac{3}{2}$ のとき, a, b, p を求めよ。

(3)　(2)のとき, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

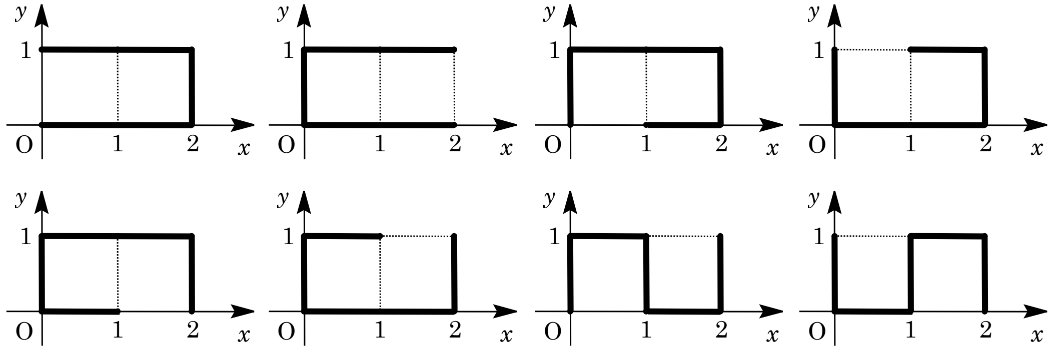
1

問題のページへ

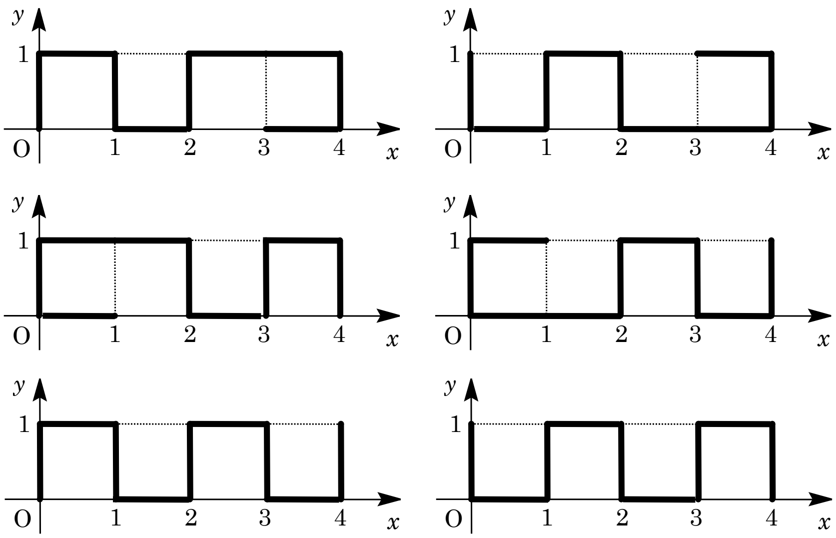
(1)　L_1 に属する格子折れ線は，右図の通りである。



　L_2 に属する格子折れ線は，下図の通りである。



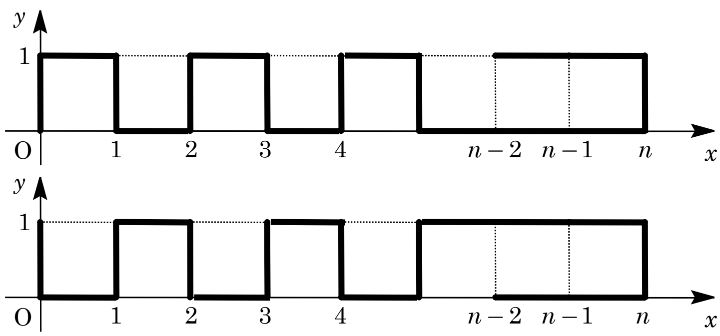
(2)　L_4 に属する格子折れ線のうち両端点の x 座標の差が 3 となるものは 4 個，差が 4 となるものは 2 個ある。これより差が 3 以上のものは，右図の通りである。



(3)　$n \geqq 3$ で，L_n に属する格子折れ線のうち両端点の x 座標の差が $n-2$ となるのは，

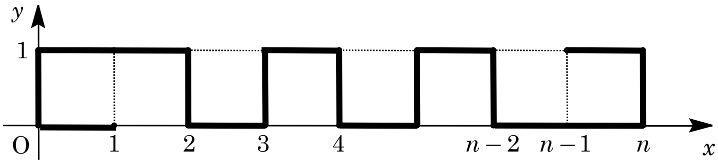
(i)　両端点の x 座標が $\{0,\ n-2\}$ のとき

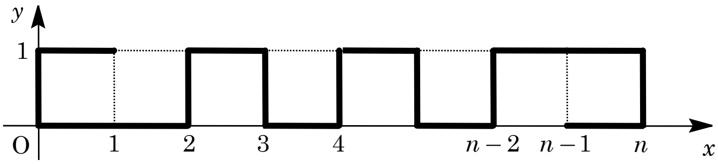
　格子折れ線について，左端点が $(0,\ 0)$ で右端点の x 座標が $n-2$ のものが 1 個，左端点が $(0,\ 1)$ で右端点の x 座標が $n-2$ のものが 1 個の計 2 個ある。



(ii)　両端点の x 座標が $\{1,\ n-1\}$ のとき

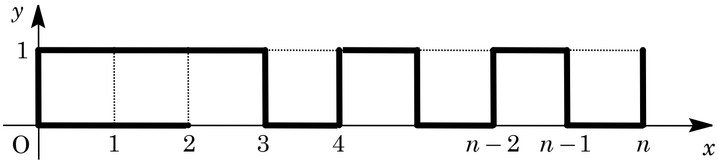
格子折れ線について，左端点が $(1,\ 0)$ で右端点の x 座標が $n-1$ のものが 1 個，左端点が $(1,\ 1)$ で右端点の x 座標が $n-1$ のものが 1 個の計 2 個ある。

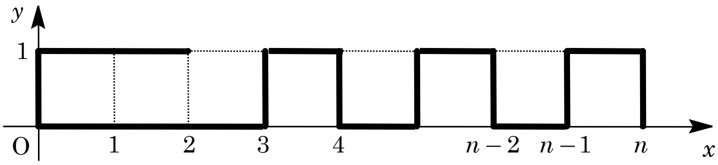




(iii) 両端点の x 座標が $\{2,\ n\}$ のとき

格子折れ線について，左端点が $(2,\ 0)$ で右端点の x 座標が n のものが 1 個，左端点が $(2,\ 1)$ で右端点の x 座標が n のものが 1 個の計 2 個ある。

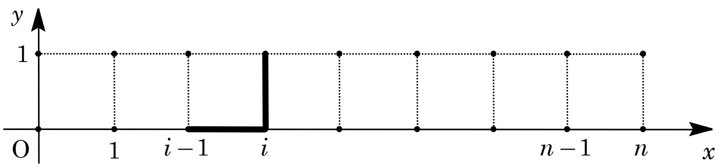


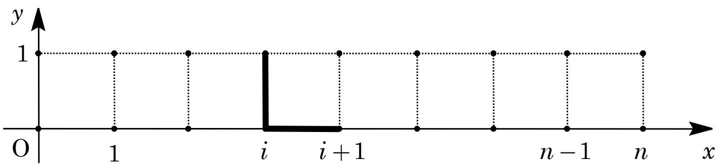


(i)～(iii)より，両端点の x 座標の差が $n-2$ となる格子折れ線は 6 個である。

(4)　L_n に属する格子折れ線について，端点の 1 つを $x=i$ $(1\leqq i\leqq n-1)$ とする。

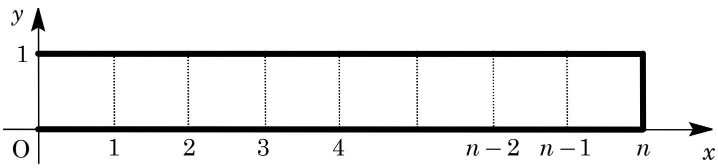
このとき，2 点 $(i,\ 0)$ と $(i,\ 1)$ を結ぶ折れ線部分があったとすると，$x<i$ に属するすべての格子点と $x>i$ に属するすべての格子点を一度ずつ通る格子折れ線は存在しない。

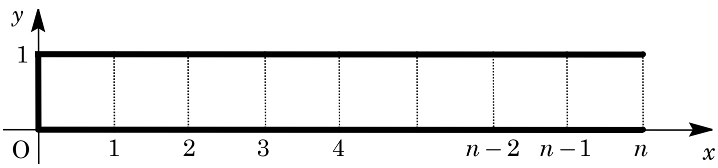




(a)　両端点の x 座標の差が 0 のとき

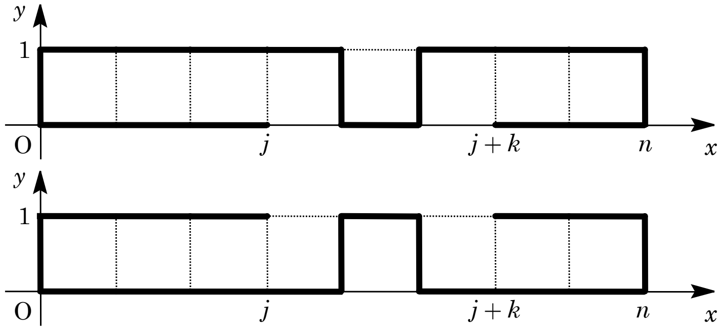
格子折れ線について，両端点の x 座標が 0 の $(0,\ 0)$ と $(0,\ 1)$ であるのが 1 個，両端点の x 座標が n の $(n,\ 0)$ と $(n,\ 1)$ であるのが 1 個の計 2 個ある。





(b)　両端点の x 座標の差が k $(1\leqq k\leqq n)$ のとき

$0\leqq j\leqq n-k$ として両端点の x 座標が，$\{j,\ j+k\}$ のとき，格子折れ線は，右図のようなる。すると，このとき格子折れ線は 2 個である。



さて，両端点の x 座標は $\{0,\ k\}$，$\{1,\ 1+k\}$，…，$\{j,\ j+k\}$，…，$\{n-k,\ n\}$ の $n-k+1$ 通りの場合があり，それぞれ 2 個ずつの格子折れ線が対応するので，合わせると $2(n-k+1)$ 個となる。

(a)(b)より，L_n に属する格子折れ線の個数 l_n は，

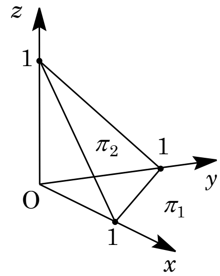
$$l_n=2+\sum_{k=1}^{n}2(n-k+1)=2+2\sum_{m=1}^{n}m=2+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n^2+n+2$$

［解　説］

パズルのような場合の数の問題です。(1)～(3)の具体例をもとに，(4)につなげるわけですが，このとき問題文にある両端点の x 座標の差を基準として考えています。ただ，説明を図で補助しましたが，記述が簡単すぎるかもしれません。

2

問題のページへ



(1)　3 点$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$を通る平面π_1は xy 平面であり，その方程式は$z=0$……①である。

また，3 点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$を通る平面π_2の方程式は，$\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$より$x+y+z=1$……②である。

π_2の法線ベクトルの成分は$(1,\ 1,\ 1)$であるので，x 成分が正の単位法線ベクトル$\overrightarrow{n_2}$は，

$$\overrightarrow{n_2}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(2)　$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$と$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$の関係は，条件より，

(i)　kが偶数のとき

$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$からの距離が最小となる$\pi_1$上の点が$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$であるので，①から，$x_{k+1}=x_k$，$y_{k+1}=y_k$，$z_{k+1}=0$となる。

(ii)　kが奇数のとき

$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$からの距離が最小となる$\pi_2$上の点が$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$より，まず$\mathrm{P}_k$を通り$\overrightarrow{n_2}$に平行な直線は，$t$を媒介変数として，

$$(x,\ y,\ z)=(x_k,\ y_k,\ z_k)+t(1,\ 1,\ 1)$$

②に代入すると$(x_k+t)+(y_k+t)+(z_k+t)=1$となり，$t=\dfrac{1}{3}(1-x_k-y_k-z_k)$

すると，$(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})=(x_k,\ y_k,\ z_k)+\dfrac{1}{3}(1-x_k-y_k-z_k)(1,\ 1,\ 1)$となり，

$$x_{k+1}=x_k+\frac{1}{3}(1-x_k-y_k-z_k)=\frac{2}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k-\frac{1}{3}z_k+\frac{1}{3}$$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{1}{3}(1-x_k-y_k-z_k)=-\frac{1}{3}x_k+\frac{2}{3}y_k-\frac{1}{3}z_k+\frac{1}{3}$$

$$z_{k+1}=z_k+\frac{1}{3}(1-x_k-y_k-z_k)=-\frac{1}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k+\frac{2}{3}z_k+\frac{1}{3}$$

(3)　$x_0=1$，$y_0=2$，$z_0=-2$のとき，(2)から，nを 0 以上の整数として，

(i)　kが偶数$(k=2n)$のとき

$$x_{2n+1}=x_{2n}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y_{2n+1}=y_{2n}\ \cdots\cdots\cdots④,\quad z_{2n+1}=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(ii)　kが奇数$(k=2n+1)$のとき

$$x_{2n+2}=\frac{2}{3}x_{2n+1}-\frac{1}{3}y_{2n+1}-\frac{1}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$y_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n+1}+\frac{2}{3}y_{2n+1}-\frac{1}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

$$z_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n+1}-\frac{1}{3}y_{2n+1}+\frac{2}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

③④⑤を⑥⑦に代入すると，

$$x_{2n+2}=\frac{2}{3}x_{2n}-\frac{1}{3}y_{2n}+\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots⑨,\ \ y_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n}+\frac{2}{3}y_{2n}+\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨＋⑩より，$x_{2n+2}+y_{2n+2}=\frac{1}{3}(x_{2n}+y_{2n})+\frac{2}{3}$ となり，

$$x_{2n+2}+y_{2n+2}-1=\frac{1}{3}(x_{2n}+y_{2n}-1)$$

すると，$x_{2n}+y_{2n}-1=(x_0+y_0-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ から，

$$x_{2n}+y_{2n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\cdots\cdots\cdots⑪$$

⑨－⑩より，$x_{2n+2}-y_{2n+2}=x_{2n}-y_{2n}$ となり，

$$x_{2n}-y_{2n}=x_0-y_0=-1\cdots\cdots\cdots⑫$$

⑪⑫より，$x_{2n}=\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1-1\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$y_{2n}=x_{2n}+1=\left(\frac{1}{3}\right)^n+1$

すると，③から $\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=0$，④から $\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}y_{2n}=1$ なので，

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,\ \ \lim_{k\to\infty}y_k=1$$

また，③④⑤を⑧に代入すると，$z_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n}-\frac{1}{3}y_{2n}+\frac{1}{3}$ となり，

$$z_{2n+2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right\}+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

これより，$n\geqq 1$ で $z_{2n}=-2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる。なお，この式は $n=0$ のときも成立。

すると，$\lim_{n\to\infty}z_{2n}=0$ となり，⑤から $\lim_{n\to\infty}z_{2n+1}=0$ なので，$\lim_{k\to\infty}z_k=0$ である。

［解　説］

空間図形を題材にした数列の極限についての標準的な問題です。連立漸化式を解くこと，そして極限を求めることに関しては，大きな困難はないでしょう。

3

問題のページへ

(1)　$0<p<a$，$b>0$ のとき，$\displaystyle\int_p^{f(x)}\frac{a}{u(a-u)}du=bx$，$0<f(x)<a$ に対して，

$$\int_p^{f(x)}\frac{a}{u(a-u)}du=\int_p^{f(x)}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{a-u}\right)du=\Big[\log|u|-\log|a-u|\Big]_p^{f(x)}$$

$$=\Big[\log\Big|\frac{u}{a-u}\Big|\Big]_p^{f(x)}=\log\Big|\frac{f(x)}{a-f(x)}\Big|-\log\Big|\frac{p}{a-p}\Big|=\log\frac{(a-p)f(x)}{p\{a-f(x)\}}$$

すると，$\log\dfrac{(a-p)f(x)}{p\{a-f(x)\}}=bx$ から，$\dfrac{(a-p)f(x)}{p\{a-f(x)\}}=e^{bx}$ となり，

$$(a-p)f(x)=p\{a-f(x)\}e^{bx}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

よって，$(a-p+pe^{bx})f(x)=ape^{bx}$ から，$f(x)=\dfrac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}\ \cdots\cdots\cdots ②$

なお，$\dfrac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}>0$，$\dfrac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}-a=\dfrac{-a(a-p)}{a-p+pe^{bx}}<0$ から，$0<f(x)<a$

は満たされ，また $f(0)=\dfrac{ap}{a-p+p}=p$ も成立している。

(2)　$f(-1)=\dfrac{1}{2}$，$f(1)=1$，$f(3)=\dfrac{3}{2}$ のとき，①から，

$$\frac{1}{2}(a-p)=p\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-b}\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad a-p=p(a-1)e^{b}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\frac{3}{2}(a-p)=p\left(a-\frac{3}{2}\right)e^{3b}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③④より，$p(2a-1)e^{-b}=p(a-1)e^{b}$ となり，$2a-1=(a-1)e^{2b}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$

④⑤より，$3p(a-1)e^{b}=p(2a-3)e^{3b}$ となり，$3(a-1)=(2a-3)e^{2b}\ \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑥⑦より，$(2a-1)(2a-3)=3(a-1)^2$ となり，$a^2-2a=0$ で $a>0$ から $a=2$

⑥から $3=e^{2b}$ なので，$e^b=\sqrt{3}$ から $b=\log\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\log 3$ となり，$b>0$ を満たす。

さらに，④に $a=2$，$e^b=\sqrt{3}$ を代入すると，$2-p=\sqrt{3}p$ から，

$$p=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$$

(3)　$b>0$ なので，②より，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}=\frac{0}{a-p}=0$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ap}{(a-p)e^{-bx}+p}=\frac{ap}{p}=a=2$$

［解　説］

定積分の計算についての基本題です。丁寧に処理するだけの問題です。