1

解答解説のページへ

実数 $\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ。

2

解答解説のページへ

方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\sqrt{3}}$ から, 無作為に 2 枚のカードを順に選び, 出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える。正の整数 n に対して, この操作を n 回繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す。

(1) $|z_n| < 5$ となる確率 P_n を求めよ。

(2) ${z_n}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間において, x 軸を軸とする半径 2 の円柱から, $|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする。また, A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする。A と B の共通部分の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

xyz 空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$ を考える。

(1)　2 直線 AB, BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ。

(2)　4 直線 AB, BC, CD, DA にともに接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ。

1

問題のページへ

$0 \leqq x \leqq 2023$ において，$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$，$I=\displaystyle\int_0^{2023} f(x)dx$ とおく。

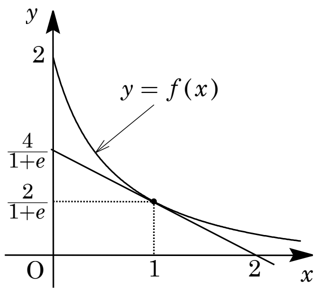
すると，$0<f(x) \leqq \dfrac{2}{e^x}=2e^{-x}$ より，

$$0<I \leqq \int_0^{2023} 2e^{-x}\,dx=-2\left[\,e^{-x}\,\right]_0^{2023}=2(1-e^{-2023})<2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$f'(x)=-\dfrac{2(1+e^x)}{(x+e^x)^2}<0$ となり，$f(x)$ は単調に減少する。

$$f''(x)=-2\cdot\frac{e^x(x+e^x)^2-2(1+e^x)^2(x+e^x)}{(x+e^x)^4}=-2\cdot\frac{e^x(x+e^x)-2(1+e^x)^2}{(x+e^x)^3}$$
$$=2\cdot\frac{e^{2x}-(x-4)e^x+2}{(x+e^x)^3}=2\cdot\frac{e^x\{e^x-(x-4)\}+2}{(x+e^x)^3}$$

ここで，$e^x \geqq x+1$ より $e^x>x-4$ となり，$f''(x)>0$ である。これより，$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，その概形は右図のようになる。



さて，このグラフ上の点 $\left(1,\ \dfrac{2}{1+e}\right)$ における接線の方程式は，$f'(1)=-\dfrac{2}{1+e}$ より $y-\dfrac{2}{1+e}=-\dfrac{2}{1+e}(x-1)$ となり，

$$y=-\frac{2}{1+e}x+\frac{4}{1+e}$$

すると，この接線は x 切片が 2，y 切片が $\dfrac{4}{1+e}$ となり，

$$I>\int_0^2 f(x)dx>\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{1+e}=\frac{4}{1+e}>1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$1<I<2$ となるので，I の整数部分は 1 である。

［解　説］

誘導のない定積分と不等式の問題です。まず，x が大きくなると $e^x \gg x$ というイメージから①の評価式を導きました。これより，結論は 1 と予測できるので，あとは I が 1 より大をいかに示すかということで，グラフを考えたわけです。

2　　問題のページへ

整数 x, y に対して，$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ より，

$$\{(x-1)x(x+1)\}^2(y-1)y(y+1)=2^7\cdot3^3\cdot5^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$(x-1)x(x+1)$，$(y-1)y(y+1)$ は連続 3 整数の積より 6 の倍数となり，

$$(x-1)x(x+1)=6k,\ (y-1)y(y+1)=6l \quad (k\text{ は整数, }l\text{ は正の整数})$$

①に代入すると $6^3k^2l=2^7\cdot3^3\cdot5^2$ となり，$k^2l=2^4\cdot5^2 \cdots\cdots\cdots ②$

すると，k^2 は $2^4\cdot5^2$ の正の約数となり，$k^2=1,\ 2^2,\ 2^4,\ 5^2,\ 2^2\cdot5^2,\ 2^4\cdot5^2$

(i)　$k^2=1$ のとき　②より $l=2^4\cdot5^2=400$ となり，$(y-1)y(y+1)=2400$

$12\cdot13\cdot14=2184$，$13\cdot14\cdot15=2730$ より，自然数 y は存在しない。

(ii)　$k^2=2^2$ のとき　②より $l=2^2\cdot5^2=100$ となり，$(y-1)y(y+1)=600$

$7\cdot8\cdot9=504$，$8\cdot9\cdot10=720$ より，自然数 y は存在しない。

(iii)　$k^2=2^4$ のとき　②より $l=5^2=25$ となり，$(y-1)y(y+1)=150$

$4\cdot5\cdot6=120$，$5\cdot6\cdot7=210$ より，自然数 y は存在しない。

(iv)　$k^2=5^2$ のとき　②より $l=2^4=16$ となり，$(y-1)y(y+1)=96$

$3\cdot4\cdot5=60$，$4\cdot5\cdot6=120$ より，自然数 y は存在しない。

(v)　$k^2=2^2\cdot5^2$ のとき　②より $l=2^2=4$ となり，$(y-1)y(y+1)=24\ (y>0)$

$2\cdot3\cdot4=24$ より $y=3$ となり，$k=\pm2\cdot5=\pm10$ から $(x-1)x(x+1)=\pm60$

$3\cdot4\cdot5=60$，$(-5)\cdot(-4)\cdot(-3)=-60$ より，$x=\pm4$

(vi)　$k^2=2^4\cdot5^2$ のとき　②より $l=1$ となり，$(y-1)y(y+1)=6\ (y>0)$

$1\cdot2\cdot3=6$ より $y=2$ となり，$k=\pm2^2\cdot5=\pm20$ から $(x-1)x(x+1)=\pm120$

$4\cdot5\cdot6=120$，$(-6)\cdot(-5)\cdot(-4)=-120$ より，$x=\pm5$

(i)〜(vi)より，①を満たす整数 $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(\pm4,\ 3)$，$(\pm5,\ 2)$ である。

［解　説］

不定方程式を解く問題です。いろいろな解法があるでしょうが，86400 が 6^3 の倍数であることに注目し，連続 3 整数の積が 6 の倍数であることを利用しています。

3　問題のページへ

(1)　カードを順に選んで得られる複素数を，$\alpha_1=1$，$\alpha_2=\sqrt{3}$，$\alpha_3=i$，$\alpha_4=\sqrt{3}i$，$\alpha_5=1+\sqrt{3}i$，$\alpha_6=\sqrt{3}+i$ とおく。このとき，それぞれの複素数が得られる確率は，$\dfrac{1}{{}_3\mathrm{P}_2}=\dfrac{1}{6}$ ずつである。そして，これらの n 個の複素数の積を z_n で表す。

さて，$|\alpha_1|=|\alpha_3|=1$，$|\alpha_2|=|\alpha_4|=\sqrt{3}$，$|\alpha_5|=|\alpha_6|=2$ から，n 個のうち，α_1 または α_3 が k 個，α_2 または α_4 が l 個，α_5 または α_6 が m 個とすると，

$$|z_n|=1^k\cdot(\sqrt{3})^l\cdot 2^m=3^{\frac{l}{2}}\cdot 2^m\quad(k+l+m=n)$$

なお，α_1 または α_3，α_2 または α_4，α_5 または α_6 が得られる確率は，それぞれ $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ ずつである。

このとき，$|z_n|<5$ となるのは，$3^{\frac{l}{2}}\cdot 2^m<5$ ………($*$)

(i)　$l=0$ のとき　($*$)から $2^m<5$ となり，$m=0,\ 1,\ 2$ より，

$$(k,\ l,\ m)=(n,\ 0,\ 0),\ (n-1,\ 0,\ 1),\ (n-2,\ 0,\ 2)$$

(ii)　$l=1$ のとき　($*$)から $2^m<\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$ となり，$m=0,\ 1$ より，

$$(k,\ l,\ m)=(n-1,\ 1,\ 0),\ (n-2,\ 1,\ 1)$$

(iii)　$l=2$ のとき　($*$)から $2^m<\dfrac{5}{3}$ となり，$m=0$ より，

$$(k,\ l,\ m)=(n-2,\ 2,\ 0)$$

(i)～(iii)より，$|z_n|<5$ となる確率 P_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$P_n=\left\{\frac{n!}{n!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!\,2!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-2)!\,2!}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\left\{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+n+n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=(2n^2+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

なお，上式は $P_1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立っている。

(2)　$\arg\alpha_1=\arg\alpha_2=0$，$\arg\alpha_3=\arg\alpha_4=\dfrac{\pi}{2}$，$\arg\alpha_5=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg\alpha_6=\dfrac{\pi}{6}$ なので，n 個のうち，α_1 または α_2 が p 個，α_3 または α_4 が q 個，α_5 が r 個，α_6 が s 個とすると，

$$\arg z_n=0\cdot p+\frac{\pi}{2}\cdot q+\frac{\pi}{3}\cdot r+\frac{\pi}{6}\cdot s=(3q+2r+s)\cdot\frac{\pi}{6}\quad(p+q+r+s=n)$$

すなわち，$\arg z_n$ は $\dfrac{\pi}{6}$ の整数倍である。

さて，${z_n}^2$ が実数となるのは，z_n が実数または純虚数の場合であることに注意し，$\arg z_n=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ である確率を Q_n，$\arg z_n=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ である確率を R_n，$\arg z_n=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ である確率を S_n とおく。

ここで，z_{n+1} が実数または純虚数になるのは，

(i)　$\arg z_n = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ であるとき

$z_{n+1} = \alpha_1 z_n$ または $z_{n+1} = \alpha_2 z_n$ または $z_{n+1} = \alpha_3 z_n$ または $z_{n+1} = \alpha_4 z_n$ の場合より，その確率は $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\right)Q_n = \dfrac{2}{3}Q_n$ である。

(ii)　$\arg z_n = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ であるとき

$z_{n+1} = \alpha_6 z_n$ の場合より，その確率は $\dfrac{1}{6}R_n$ である。

(iii)　$\arg z_n = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ であるとき

$z_{n+1} = \alpha_5 z_n$ の場合より，その確率は $\dfrac{1}{6}S_n$ である。

(i)～(iii)より，$Q_{n+1} = \dfrac{2}{3}Q_n + \dfrac{1}{6}R_n + \dfrac{1}{6}S_n$ となり，$Q_n + R_n + S_n = 1$ なので，

$$Q_{n+1} = \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{6}(R_n + S_n) = \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{6}(1 - Q_n) = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{6}$$

そこで，$Q_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(Q_n - \dfrac{1}{3}\right)$ と変形し，$Q_1 = \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$ から，

$$Q_n - \frac{1}{3} = \left(Q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

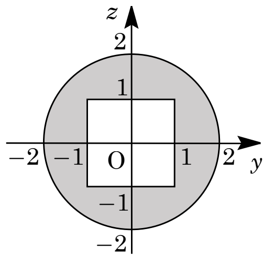
以上より，$Q_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

複素数と確率の融合問題です。(1)は確率を直接的に求めましたが，(2)はそれが難しいため，漸化式を利用しています。

4

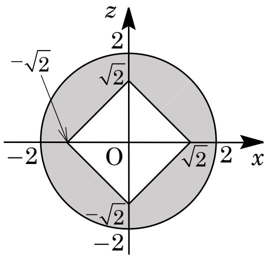
問題のページへ



立体 A は, x 軸を軸とする半径 2 の円柱から, $|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものなので, A を表す不等式は,

$$y^2+z^2\leqq 4 \text{ かつ } (|y|\geqq 1 \text{ または } |z|\geqq 1)\cdots\cdots\text{①}$$

なお, 立体 A の yz 平面への正射影は, 右図の網点部のようになる。



立体 B は, A を x 軸のまわりに $45°$ 回転してから z 軸のまわりに $90°$ 回転したものなので, B を表す不等式は,

$$x^2+z^2\leqq 4 \text{ かつ } |x|+|z|\geqq\sqrt{2}\cdots\cdots\text{②}$$

なお, 立体 B の xz 平面への正射影は, 右図の網点部のようになる。

さて, 平面 $z=k\ (0\leqq k\leqq 2)$ における断面を調べると,

立体 A については, ①より $y^2+k^2\leqq 4$ かつ $(|y|\geqq 1$ または $k\geqq 1)$ となり,

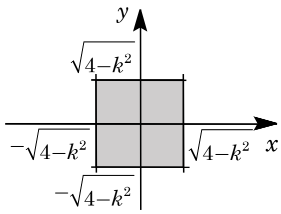
$$-\sqrt{4-k^2}\leqq y\leqq\sqrt{4-k^2} \text{ かつ } (|y|\geqq 1 \text{ または } k\geqq 1)$$

立体 B については, ②より $x^2+k^2\leqq 4$ かつ $|x|\geqq\sqrt{2}-k$ となり,

$$-\sqrt{4-k^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-k^2} \text{ かつ } |x|\geqq\sqrt{2}-k$$

(i)　$\sqrt{2}\leqq k\leqq 2$ のとき

$k\geqq 1$ および $|x|\geqq\sqrt{2}-k$ は満たされているので, A と B の共通部分を表す不等式は,

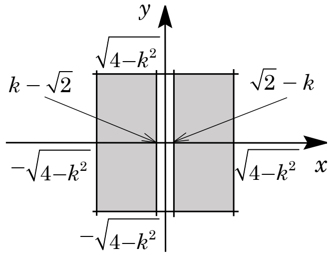


$$-\sqrt{4-k^2}\leqq y\leqq\sqrt{4-k^2}$$
$$-\sqrt{4-k^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-k^2}$$

その断面積 $S(k)$ は, $S(k)=4\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=4(4-k^2)$

(ii)　$1\leqq k\leqq\sqrt{2}$ のとき

$k\geqq 1$ は満たされているので, A と B の共通部分を表す不等式は,



$$-\sqrt{4-k^2}\leqq y\leqq\sqrt{4-k^2}$$
$$-\sqrt{4-k^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-k^2}$$
$$|x|\geqq\sqrt{2}-k$$

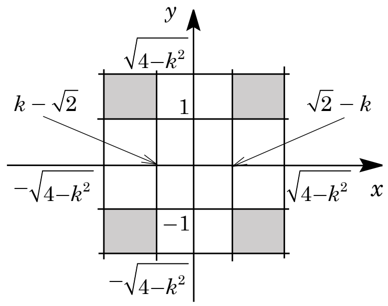
その断面積 $S(k)$ は,

$$\begin{aligned}S(k)&=4\left(\sqrt{4-k^2}-\sqrt{2}+k\right)\sqrt{4-k^2}\\&=4\left\{(4-k^2)+k\sqrt{4-k^2}-\sqrt{2}\sqrt{4-k^2}\right\}\end{aligned}$$

(iii) $0 \leqq k \leqq 1$のとき

AとBの共通部分を表す不等式は,

$$-\sqrt{4-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{4-k^2}$$
$$-\sqrt{4-k^2} \leqq x \leqq \sqrt{4-k^2}$$
$$|y| \geqq 1,\ |x| \geqq \sqrt{2}-k$$



その断面積$S(k)$は,

$$S(k) = 4\left(\sqrt{4-k^2}-\sqrt{2}+k\right)\left(\sqrt{4-k^2}-1\right)$$
$$= 4\left\{(4-k^2+\sqrt{2}-k)+k\sqrt{4-k^2}-(1+\sqrt{2})\sqrt{4-k^2}\right\}$$

(i)～(iii)より, AとBの共通部分の体積をVとおくと, xy平面についての対称性から,

$$V = 2\int_0^2 S(k)\,dk$$
$$= 8\int_{\sqrt{2}}^2 (4-k^2)\,dk + 8\int_1^{\sqrt{2}} \left\{(4-k^2)+k\sqrt{4-k^2}-\sqrt{2}\sqrt{4-k^2}\right\}dk$$
$$+ 8\int_0^1 \left\{(4-k^2+\sqrt{2}-k)+k\sqrt{4-k^2}-(1+\sqrt{2})\sqrt{4-k^2}\right\}dk$$
$$= 8\int_0^2 (4-k^2)\,dk + 8\int_0^{\sqrt{2}} k\sqrt{4-k^2}\,dk - 8\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-k^2}\,dk$$
$$- 8\int_0^1 \sqrt{4-k^2}\,dk + 8\int_0^1 (\sqrt{2}-k)\,dk$$

ここで, $I_1 = \int_0^2 (4-k^2)\,dk$, $I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} k\sqrt{4-k^2}\,dk$, $I_3 = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-k^2}\,dk$, $I_4 = \int_0^1 \sqrt{4-k^2}\,dk$, $I_5 = \int_0^1 (\sqrt{2}-k)\,dk$とおくと,

$$I_1 = \left[4k - \frac{k^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3},\quad I_5 = \left[\sqrt{2}k - \frac{k^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

また, $4-k^2 = t$とおくと$-2k\,dk = dt$となり, $k = 0 \to \sqrt{2}$は$t = 4 \to 2$なので,

$$I_2 = \frac{1}{-2}\int_4^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

さらに, 半径2の四分円を対応させ,

$$I_3 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2} + 1,\quad I_4 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって, 求める体積Vは, $V = 8(I_1 + I_2 - \sqrt{2}I_3 - I_4 + I_5)$なので,

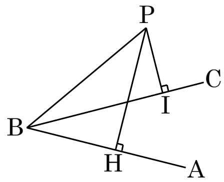
$$V = 8\left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \sqrt{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 8\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = 60 - \frac{16}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \left(\frac{8}{3} + 4\sqrt{2}\right)\pi$$

［解 説］

立体の体積を求める問題です。断面を図示し，その面積を求めて積分するだけですが，計算量はかなりのものです。

5

問題のページへ



(1)　2 直線 AB, BC から等距離にある点 P に対し, AB, BC に下ろした垂線を, それぞれ PH, PI とする。

このとき, PH＝PI より BH＝BI である。すなわち, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の BA 方向への正射影ベクトルの大きさと, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の BC 方向への正射影ベクトルの大きさが等しい。

さて, $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ として, $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BA}}=(0,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -2)$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の単位ベクトルを, それぞれ $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ とおくと,

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ -1)$$

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BI}}|$ から, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{e_2}|$ となり,

$$|-(y-1)-(z-1)|=|-(x-1)-(z-1)|,\ |y+z-2|=|x+z-2|$$

よって, $y+z-2=\pm(x+z-2)$ から, 点 P 全体のなす図形は, 2 つの平面

$$y=x\ \cdots\cdots\cdots①,\ x+y+2z=4\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　(1)と同様に, 2 直線 BC, CD から等距離にある点 P は, $\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x+1,\ y-1,\ z+1),\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}=(2,\ 0,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ -1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{e_4}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$$

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{e_3}|=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{e_4}|$ から,

$$|(x+1)+(z+1)|=|-(y-1)+(z+1)|,\ |x+z+2|=|-y+z+2|$$

よって, $x+z+2=\pm(-y+z+2)$ から, 点 P 全体のなす図形は, 2 つの平面

$$y=-x\ \cdots\cdots\cdots③,\ x-y+2z=-4\ \cdots\cdots\cdots④$$

さらに, 2 直線 CD, DA から等距離にある点 P は,

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(x+1,\ y,\ z),\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}=(0,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{DA}}=(2,\ 0,\ 0)$$

$$\overrightarrow{e_5}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{e_6}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|}=(1,\ 0,\ 0)$$

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{e_5}|=|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{e_6}|$ から, $|y-z|=\sqrt{2}|x+1|$

よって, $y-z=\pm\sqrt{2}(x+1)$ から, 点 P 全体のなす図形は, 2 つの平面

$$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ \sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

以上より, 4 直線 AB, BC, CD, DA にともに接する球面の中心 $(x,\ y,\ z)$ は,

(①または②) かつ (③または④) かつ (⑤または⑥)

そして, 直線 AD が x 軸なので, その半径は $\sqrt{y^2+z^2}$ で表される。

(i)　$y=x\cdots$①，$y=-x\cdots$③，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}\cdots$⑤のとき

①③より $x=y=0$ となり，⑤に代入すると $z=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$，半径 $\sqrt{(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

(ii)　$y=x\cdots$①，$y=-x\cdots$③，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}\cdots$⑥のとき

①③より $x=y=0$ となり，⑥に代入すると $z=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，半径 $\sqrt{(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

(iii)　$y=x\cdots$①，$x-y+2z=-4\cdots$④，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}\cdots$⑤のとき

①④より $y=x$，$z=-2$ となり，⑤に代入すると $x=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ -2)$，半径 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

(iv)　$y=x\cdots$①，$x-y+2z=-4\cdots$④，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}\cdots$⑥のとき

①④より $y=x$，$z=-2$ となり，⑥に代入すると $x=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2)$，半径 $\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

(v)　$x+y+2z=4\cdots$②，$y=-x\cdots$③，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}\cdots$⑤のとき

②③より $y=-x$，$z=2$ となり，⑤に代入すると $x=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$，半径 $\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

(vi)　$x+y+2z=4\cdots$②，$y=-x\cdots$③，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}\cdots$⑥のとき

②③より $y=-x$，$z=2$ となり，⑥に代入すると $x=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 2)$，半径 $\sqrt{(-\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

(vii)　$x+y+2z=4\cdots$②，$x-y+2z=-4\cdots$④，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}\cdots$⑤のとき

②④より $x=-2z$，$y=4$ となり，⑤に代入すると $z=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(2\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$，半径 $\sqrt{4^2+(-\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

(viii)　$x+y+2z=4\cdots$②，$x-y+2z=-4\cdots$④，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}\cdots$⑥のとき

②④より $x=-2z$，$y=4$ となり，⑥に代入すると $z=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心 $(-2\sqrt{2},\ 4,\ \sqrt{2})$，半径 $\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

［解 説］

空間図形の標準的な問題です。(1)が(2)への誘導となっていますが，同じ作業の繰り返しがたくさんあり，時間をかなり費やします。