1

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。自然数の組$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$を解とする方程式

$$(*)\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，$(*)$の解$(a_1,\ a_2,\ a_3)$のうち，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ を満たすものをすべて求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，$(*)$の任意の解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(3)　$(*)$のある解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき，n のとり得る値をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間において，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$ をとり，線分 CD の中点を M とする。さらに，N を線分 BD 上の点とする。また，z 軸と平行でない直線上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{Q}(x',\ y',\ z')$ に対して，$\dfrac{z'-z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の勾配と呼ぶ。$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ の勾配を t_1，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ の勾配を t_2 とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$t_2=0$ となるように N をとったとき，t_1 の値を求めよ。

(2)　$l=|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NM}}|$ とし，l が最小となるように N をとったとき，l の値を求めよ。

(3)　$0 \leqq t_2 \leqq t_1$ となるように N をとったとき，N の y 座標を s とする。s がとり得る値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)$ を連続関数とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　次の等式を示せ。　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$

(2)　次の等式を示せ。　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$

(3)　次の定積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx$

1　問題のページへ

自然数 a_1，a_2，…，a_n $(n \geqq 2)$ に対して，$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n$ ………(＊)

(1)　$n=3$ で，(＊)は $a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3$ ……①となり，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たすとき，

$$a_1+a_2+a_3 \leqq a_3+a_3+a_3=3a_3$$

①から $a_1a_2a_3 \leqq 3a_3$ となり，$a_3>0$ から，$a_1a_2 \leqq 3$ $(a_1 \leqq a_2)$ である。

・$a_1a_2=1$ のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 1)$ となるが，①は $2+a_3=a_3$ となり不成立。

・$a_1a_2=2$ のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 2)$ となり，①は $3+a_3=2a_3$ から $a_3=3$ である。

・$a_1a_2=3$ のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 3)$ となり，①は $4+a_3=3a_3$ から $a_3=2$ である。

よって，①かつ $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たすのは，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 3)$ である。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，(＊)の任意の解 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ において，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ としてよいので，(1)と同様にすると $a_1+a_2+\cdots+a_n \leqq na_n$ となり，

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n \leqq na_n,\quad a_1a_2\cdots a_{n-1} \leqq n \text{ ………②}$$

ここで，$a_i=1$ となる i が存在しないと仮定すると，$2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ から，

$$2^{n-1} \leqq a_1a_2\cdots a_{n-1} \text{ ………③}$$

②③より，$2^{n-1} \leqq n$ ………④

さて，$n \geqq 3$ のとき，$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}$ と考えて，二項展開すると，

$$2^{n-1} \geqq {}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2=1+(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)>n$$

すると，$n \geqq 3$ のとき④は成立しない。

以上より，(＊)を満たす $a_i=1$ となる i は少なくとも 1 つ存在する。

(3)　(＊)のある解 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ とすると，$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在するとき，$a_1=a_2=1$ とおくことができ，

$$1=a_1=a_2<a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots \leqq a_n$$

(i)　$n=2$ のとき　(＊)は $a_1+a_2=a_1a_2$ となり，$2=1$ から不成立。

(ii)　$n=3$ のとき　(＊)は $a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3$ となり，$2+a_3=a_3$ から不成立。

(iii)　$n \geqq 4$ のとき　(＊)は $2+a_3+a_4+\cdots+a_n=a_3a_4\cdots a_n$ ………⑤

$2+a_3+a_4+\cdots+a_n \leqq 2+(n-2)a_n$ から，$a_3a_4\cdots a_{n-1}a_n \leqq 2+(n-2)a_n$ となり，

$$\{a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)\}a_n \leqq 2 \text{ ………⑥}$$

さて，$2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ から，$a_3a_4\cdots a_{n-1} \geqq 2^{n-3}$ となり，$n \geqq 4$ のとき，

$$2^{n-3} \geqq {}_{n-3}\mathrm{C}_0+{}_{n-3}\mathrm{C}_1=1+(n-3)=n-2$$

よって，$a_3a_4\cdots a_{n-1} \geqq 2^{n-3} \geqq n-2$ ……⑦となり，$a_n \geqq 2$ なので，⑥から，

$$0 \leqq a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2) \leqq 1$$

(iii-i)　$a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)=0$ のとき

$a_3a_4\cdots a_{n-1}=n-2$ となり，⑦から $2^{n-3}=n-2$ ……⑧，$a_3a_4\cdots a_{n-1}=2^{n-3}$ ……⑨

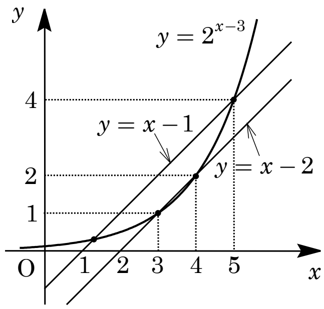
⑧より $n=4$，⑨より $a_3=\cdots=a_{n-1}=2$

これより，⑤から $2+2+a_4=2a_4$ となり，

$a_4=4$

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$ において，

(＊)は成立している。



(iii-ii)　$a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)=1$ のとき

⑥から $a_n=2$ となり，$a_3=a_4=\cdots=a_{n-1}=2$

これより，$a_3a_4\cdots a_{n-1}=n-1$ から $2^{n-3}=n-1$ となり，$n=5$

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ において，(＊)は成立している。

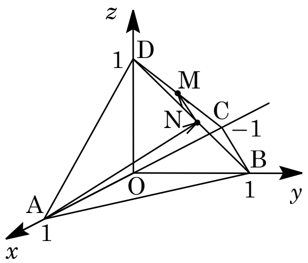
(i)～(iii)より，求める n の値は，$n=4,\ 5$ である。

［解 説］

和と積が等しくなる不定方程式を題材とした問題で，医歯大らしく誘導が細かく付いています。(3)はいろいろな記述方法があると思われます。なお，指数方程式はグラフを用いて処理をしていますが，丁寧に記述するならば，数学的帰納法でしょう。

2

問題のページへ



(1)　A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(-1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 1)$ に対して，線分 CD の中点を M，線分 BD を $1-s:s$ $(0\leqq s\leqq 1)$ に内分する点を N とおくと，

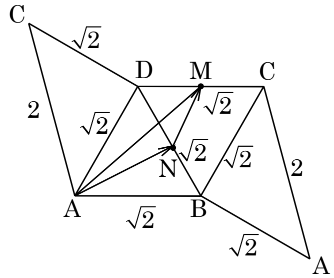
$$\mathrm{M}\Big(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\Big),\ \mathrm{N}(0,\ s,\ 1-s)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=(-1,\ s,\ 1-s)$，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\Big(-\frac{1}{2},\ -s,\ -\frac{1}{2}+s\Big)$ の勾配を，それぞれ t_1，t_2 とおくと，

$$t_1=\frac{1-s}{\sqrt{1+s^2}},\ t_2=\frac{-\frac{1}{2}+s}{\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}}=\frac{-1+2s}{\sqrt{1+4s^2}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t_2=0$ のとき $s=\frac{1}{2}$ となるので，このとき $t_1=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

(2)　四面体 ABCD の展開図において，



$$l=|\overrightarrow{\mathrm{AN}}|+|\overrightarrow{\mathrm{NM}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$$

ここで，$\angle\mathrm{ADC}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ より，$\triangle\mathrm{ADM}$ に余弦定理を適用すると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2=(\sqrt{2})^2+\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=2+\frac{1}{2}-2\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{7}{2}$$

これより，l の最小値は，$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ である。

(3)　$0\leqq t_2\leqq t_1$ のとき，$(*)$より $0\leqq\dfrac{-1+2s}{\sqrt{1+4s^2}}\leqq\dfrac{1-s}{\sqrt{1+s^2}}$ となり，

$$0\leqq(-1+2s)\sqrt{1+s^2}\leqq(1-s)\sqrt{1+4s^2}$$

ここで，$0\leqq s\leqq 1$ のとき，左側の不等式から $-1+2s\geqq 0\ \Big(\frac{1}{2}\leqq s\leqq 1\Big)$ のもとで，右側の不等式の両辺を 2 乗すると，$(-1+2s)^2(1+s^2)\leqq(1-s)^2(1+4s^2)$

$$1-4s+5s^2-4s^3+4s^4\leqq 1-2s+5s^2-8s^3+4s^4$$

まとめると，$4s^3-2s\leqq 0$ となり，$2s(\sqrt{2}s+1)(\sqrt{2}s-1)\leqq 0$

すると，$\frac{1}{2}\leqq s\leqq 1$ から，s のとり得る値の範囲は，$\frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

［解　説］

空間図形の問題です。ただ，誘導とはほとんど無縁な小問構成になっています。

3

問題のページへ

(1)　$u=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと $du=-dx$ となり，$x=0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $u=\dfrac{\pi}{2}\to 0$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi-2u))\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2u)\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$t=\sin x-\cos x$ とおくと $dt=(\cos x+\sin x)dx$ となり，$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形すると，$x=0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t=-1\to 1$ である。

また，$t^2=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$ から，$\sin 2x=1-t^2$ となるので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)dx=\int_{-1}^{1} f(1-t^2)dt\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}dx$ とする。ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ とおくと，$f(x)$ は連続関数であり，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx$ と表せる。

すると，①から $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$ となり，$I+I$ を考え②を利用すると，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)dx=\int_{-1}^{1} f(1-t^2)dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$$

ここで，$f(1-t^2)$ は t についての偶関数なので，$2I=2\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$ となる。

さらに，$t=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $dt=(\cos\theta)d\theta$ となり，$t=0\to 1$ のとき $\theta=0\to\dfrac{\pi}{2}$ から，$I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$ は，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta=\left[\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

［解　説］

定積分の計算問題です。(2)の置換を見つけるところがポイントです。