1

解答例のページへ

20 個の合同な正三角形の面をもち，各頂点に 5 つの面が集まるへこみのない多面体を，正二十面体という。各面に 20 種類の異なる目が 1 つずつ与えられており，すべての目が等しい確率で出る正二十面体のサイコロを I とする。I の 2 つの面 A, B に対し，I の表面上を，A の内部の点から B の内部の点へ，I の頂点を通らずに移動するとき，横切る I の辺の本数の最小値を $d(A,\ B)$ とする。たとえば，A と B が 1 辺を共有しているとき，$d(A,\ B)=1$ となる。また，I の任意の面 A に対し，$d(A,\ A)=0$ とする。さらに，I を n 回投げたとき，i 回目に出た目に対応する面を F_i とし，$n \geqq 2$ のとき，$d(F_i,\ F_j)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ の最大値を M，最小値を m とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　xyz 空間において，I の 1 つの面と xy 平面が平行となるように I を配置したとき，I の頂点または辺上の点を通り z 軸に平行な直線と xy 平面の交点全体の集合がなす図形を I' とする。I' の概形を描け。ただし，I' における線分どうしの長さの比やなす角の角度は正確でなくてもよい。

(2)　$n=2$ のとき，0 以上の整数 k に対し，$d(F_i,\ F_j)=k$ となる確率を P_k とする。$P_k>0$ となるすべての k に対して，それぞれ P_k を求めよ。

(3)　$n=3$ のとき，$M \geqq 3$ となる確率を求めよ。

(4)　$n \geqq 3$ のとき，$m \geqq 3$ となる確率を求めよ。

(5)　$n \geqq 10$ のとき，$1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 4)$，B$(3,\ 7)$ をとる。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる整数 $m,\ n$ が存在するような xy 平面上の点 P 全体の集合を L とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(2,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(3,\ 1)$ は L に属するか。それぞれ判定せよ。

(2) L に属する点のうち，x 軸上にあるものをすべて求めよ。

(3) 2 点 A$'$，B$'$ を L の要素とする。L の任意の要素 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+n'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる整数 m'，n' が存在するとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right|$ の最小値を求めよ。

(4) 任意の L の要素 P に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数となるような xy 平面上の点 Q 全体の集合を M とする。M の要素のうち，x 座標および y 座標の絶対値がともに 1 以下であるものをすべて求めよ。

3

解答例のページへ

a を 1 より大きい実数とし，xy 平面上の曲線 $C_1 : y = a^x$ および曲線 $C_2 : y = \log_a x$ について考える。原点を O とし，C_1 上に点 P，C_2 上に点 Q をとる。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　O を通る傾き k の直線が C_1 に接するとき，a の値を k を用いて表せ。また，接点の座標を a を用いて表せ。

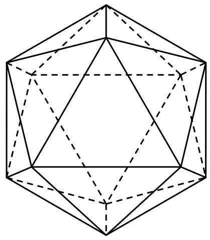
(2)　O を通る直線が C_2 に接するとき，接点の座標を a を用いて表せ。

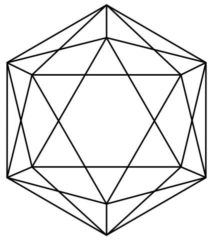
(3)　△OPQ が正三角形となるような P，Q の組の個数を，a の値で場合分けして求めよ。

1

問題のページへ

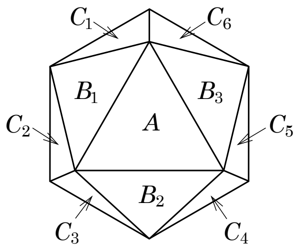
(1)　1 つの面が xy 平面と平行な正二十面体のサイコロ I，および I を xy 平面に正射影した I' の概形は右図のようになる。

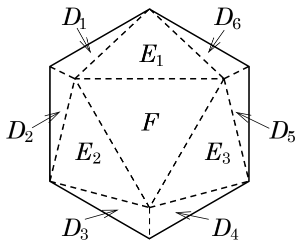

サイコロ I


正射影 I'

(2)　I の 2 つの面 A, B に対し，I の表面上を, A の内部の点から B の内部の点へ，I の頂点を通らずに移動するとき，横切る I の辺の本数の最小値を $d(A,\ B)$ とする。

さて, xy 平面に平行な I の上面を A, 下面を F とし, z 軸の正の方向から見て, 各面を右図のように設定する。





そして，I を 2 回投げたとき，$d(F_1,\ F_2)=k$ となる確率 P_k は, $F_1=A$ とすると，

・$d(F_1,\ F_2)=0$ のとき　$F_2=A$ より，$P_0=\dfrac{1}{20}$

・$d(F_1,\ F_2)=1$ のとき　$F_2=B_1,\ B_2,\ B_3$ より，$P_1=\dfrac{3}{20}$

・$d(F_1,\ F_2)=2$ のとき　$F_2=C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6$ より，$P_2=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

・$d(F_1,\ F_2)=3$ のとき　$F_2=D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6$ より，$P_3=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

・$d(F_1,\ F_2)=4$ のとき　$F_2=E_1,\ E_2,\ E_3$ より，$P_4=\dfrac{3}{20}$

・$d(F_1,\ F_2)=5$ のとき　$F_2=F$ より，$P_5=\dfrac{1}{20}$

(3)　I を n 回投げたとき，$d(F_i,\ F_j)$ $(1\leqq i<j\leqq n)$ の最大値を M, 最小値を m とする。ここで，$n=3$ のとき，$M\leqq 2$ となるのは,

$$d(F_1,\ F_2)\leqq 2,\ d(F_1,\ F_3)\leqq 2,\ d(F_2,\ F_3)\leqq 2$$

そこで，$F_1=A$ として，

(i)　$F_2=A$ のとき　$F_3=A,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6$

このときの確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{10}{20}=\dfrac{10}{400}$ である。

(ii)　$F_2=B_1,\ B_2,\ B_3$ のとき

$F_2=B_1$ のとき $F_3=A,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_6$ となり，$F_2=B_2,\ B_3$ のときも同様なので，このときの確率は，$\dfrac{3}{20}\times\dfrac{8}{20}=\dfrac{24}{400}$ となる。

(iii)　$F_2=C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6$ のとき

$F_2=C_1$ のとき $F_3=A,\ B_1,\ B_3,\ C_1,\ C_2,\ C_6$ となり，$F_2=C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6$ のときも同様なので，このときの確率は，$\dfrac{6}{20}\times\dfrac{6}{20}=\dfrac{36}{400}$ となる。

(i)〜(iii)より，$M\leqq 2$ となる確率は，$\dfrac{10}{400}+\dfrac{24}{400}+\dfrac{36}{400}=\dfrac{7}{40}$ である。

したがって，$M\geqq 3$ となる確率は，$1-\dfrac{7}{40}=\dfrac{33}{40}$ となる。

(4)　$n\geqq 3$ のとき $m\geqq 3$ となるのは，$d(F_i,\ F_j)\geqq 3\ (1\leqq i<j\leqq n)$ より，

(Ⅰ) $n=3$ のとき　$d(F_1,\ F_2)\geqq 3$ から，$F_1=A$ として，

$$F_2=D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ F$$

・$F_2=D_1$ のときは $F_3=D_3,\ D_4,\ D_5,\ E_3$ となり，$F_2=D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6$ のときも同様なので，このときの確率は，$\dfrac{6}{20}\times\dfrac{4}{20}=\dfrac{24}{400}$ となる。

・$F_2=E_1$ のときは $F_3=D_3,\ D_4$ となり，$F_2=E_2,\ E_3$ のときも同様なので，このときの確率は，$\dfrac{3}{20}\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{6}{400}$ となる。

・$F_2=F$ のときは，どんな F_3 でも $d(F_i,\ F_3)\geqq 3\ (i=1,\ 2)$ は成立しない。

したがって，$m\geqq 3$ となる確率は，$\dfrac{24}{400}+\dfrac{6}{400}=\dfrac{3}{40}$ である。

(Ⅱ) $n=4$ のとき　$d(F_1,\ F_2)\geqq 3$ から，$F_1=A$ として(Ⅰ)の結果を利用すると，

$$F_2=D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6,\ E_1,\ E_2,\ E_3$$

・$F_2=D_1$ のときは $F_3=D_3,\ D_4,\ D_5,\ E_3$ となるが，$F_3=D_4,\ E_3$ ならば，どんな F_4 でも $d(F_i,\ F_4)\geqq 3\ (i=1,\ 2,\ 3)$ は成立しない。$F_3=D_3,\ D_5$ ならば，$F_3=D_3$ では $F_4=D_5$，$F_3=D_5$ では $F_4=D_3$ となり，$F_2=D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6$ のときも同様なので，このときの確率は，$\dfrac{6}{20}\times\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2000}$ となる。

・$F_2=E_1$ のときは $F_3=D_3,\ D_4$ となるが，どんな F_4 でも $d(F_i,\ F_4)\geqq 3\ (i=1,\ 2,\ 3)$ は成立しない。$F_2=E_2,\ E_3$ のときも同様である。

したがって，$m\geqq 3$ となる確率は $\dfrac{3}{2000}$ である。

(Ⅲ) $n\geqq 5$ のとき　$d(F_1,\ F_2)\geqq 3$ から，$F_1=A$ として(Ⅱ)の結果を利用すると，

$$F_2=D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5,\ D_6$$

・$F_2=D_1$ のときは $(F_3,\ F_4)=(D_3,\ D_5),\ (D_5,\ D_3)$ となるが，どんな F_5 でも $d(F_i,\ F_5)\geqq 3\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は成立しない。

したがって，$m\geqq 3$ となる確率は 0 である。

(5)　$n\geqq 10$ のとき $1\leqq m\leqq M\leqq 4$ となるのは，$1\leqq d(F_i,\ F_j)\leqq 4\ (1\leqq i<j\leqq n)$ から，F_j は F_i と「同じ面でない」かつ「対面でない」という条件が対応する。

すると，I の対面は 10 組から，

(Ⅰ) $n \geqq 11$ のとき　$1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となる確率は 0 である。

(Ⅱ) $n = 10$ のとき　$1 \leqq m \leqq M \leqq 4$ となる確率は,

$$\frac{20}{20}\times\frac{18}{20}\times\frac{16}{20}\times\cdots\times\frac{2}{20}=\frac{2^{10}\cdot 10!}{20^{10}}=\frac{10!}{10^{10}}=\frac{9!}{10^{9}}$$

［コメント］

正二十面体が題材の確率問題です。まず, (1)の概形が描けないと, (2)以降に繋がらないので, ここが最初の関所になっています。ただ, そこが突破できても, 図を見ながら数え上げていくのは, かなり面倒です。

2

問題のページへ

(1)　3 点 O(0, 0)，A(2, 4)，B(3, 7) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる整数 m, n が存在する点 P 全体の集合を L は，P$(x,\ y)$ とおくと，

$$(x,\ y) = m(2,\ 4) + n(3,\ 7) = (2m + 3n,\ 4m + 7n)$$

これより，$x = 2m + 3n$，$y = 4m + 7n$ となり，x と y はともに整数で，

$$m = \frac{7x - 3y}{2} = 3x - 2y + \frac{x + y}{2},\ \ n = -2x + y \cdots\cdots\cdots ①$$

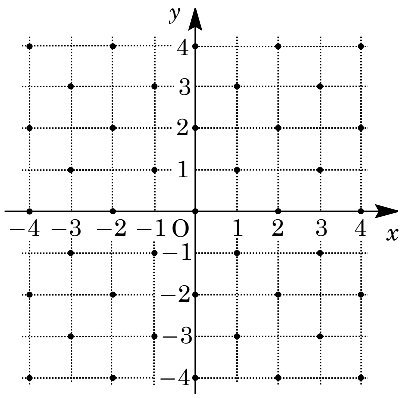
これより，点 P が L に属する条件は $x + y$ が偶数，すなわち x と y の偶奇が一致することである。すると，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(2,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(3,\ 1)$ に対して，

$$\mathrm{P}_1 \in L,\ \mathrm{P}_2 \notin L,\ \mathrm{P}_3 \in L$$

(2)　x 軸上にある点 P$(x,\ 0)$ に対して，①から，$m = 3x + \dfrac{x}{2}$，$n = -2x$

点 P が L に属する条件は x が偶数より，k を整数として P$(2k,\ 0)$ と表せる。

(3)　①から，L の要素である点 A′，B′ は，xy 平面上で，右図の黒丸で表される。



このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|$ の値は，小さい方から 0，$\sqrt{2}$，2，$\cdots$ である。そこで，整数 m'，n' で $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m'\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + n'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と表される点 P は，

・$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB'}}| = 0$ のとき　原点のみ

・$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| = 0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}| > 0$ のとき　直線 OB′ 上の点

・$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}| = 0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| > 0$ のとき　直線 OA′ 上の点

点 P は L の任意の要素から，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| > 0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}| > 0$ が必要で，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|$ の最小となるのは，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB'}}| = \sqrt{2}$ のときである。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = (1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (1,\ -1)$ のときを調べると，

$$(x,\ y) = m'(1,\ 1) + n'(1,\ -1) = (m' + n',\ m' - n')$$

これより，$x = m' + n'$，$y = m' - n'$ となり，$m' = \dfrac{x + y}{2}$，$n' = \dfrac{x - y}{2} \cdots\cdots\cdots ②$

すると，x と y の偶奇が一致する任意の点 P について，②より，整数 m'，n' が存在することがわかる。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|$ の最小値は $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ である。

(4)　L の任意の要素 P は，k, l を整数として，P$(2k - l,\ l)$ とおくことができ，ここで Q$(X,\ Y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2k - l)X + lY = 2X \cdot k + (-X + Y)l \cdots\cdots\cdots ③$

すると，どんな整数 k, l に対しても $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が整数になる，すなわち点 Q が集合 M の要素である条件は，③から「$2X$，$-X + Y$ がともに整数」である。

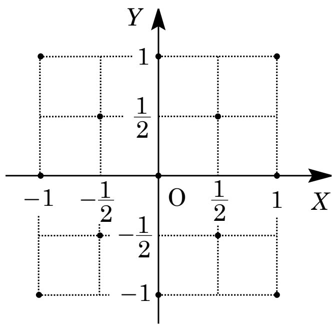
さて，$|X|\leqq 1$，$|Y|\leqq 1$のとき，$2X$が整数より，

$$X=-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1$$

さらに，$-X+Y$が整数より，Mの要素であるQ$(X,\ Y)$は，右図の黒丸の13個の点が対応し，

$$(0,\ 0),\ (\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

$$(\pm 1,\ \pm 1),\ \left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)\ (\text{複号任意})$$



［コメント］

平面ベクトルに格子点を絡めた問題です。(3)(4)では，図を描くとイメージが明瞭になります。

3

問題のページへ

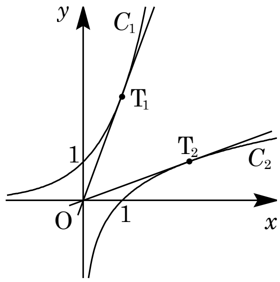
(1)　$a>1$ のとき，曲線 $C_1: y=a^x$ 上の点 $\mathrm{T_1}(t,\ a^t)$ における接線の方程式は，$y'=a^x\log a$ から，

$$y-a^t=a^t(\log a)(x-t)$$

原点 O を通るとき，$-a^t=-t\cdot a^t\log a$ から，

$$1=t\log a\ ,\ t=\frac{1}{\log a}=\log_a e$$

すると，$a^t=a^{\log_a e}=e$ から，$\mathrm{T_1}(\log_a e,\ e)$ である。



また，接線の傾き k は $k=\dfrac{e}{\log_a e}=e\log a$ より $\log a=\dfrac{k}{e}$ となり，$a=e^{\frac{k}{e}}$ である。

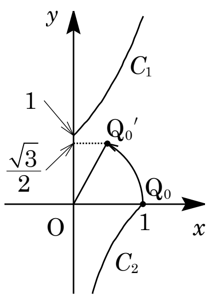
(2)　$y=\log_a x$ すなわち $x=a^y$ は，$y=a^x$ の逆関数なので，曲線 $C_2: y=\log_a x$ は $C_1: y=a^x$ と直線 $y=x$ について対称である。

すると，O を通る直線が C_2 に接するとき，接点 $\mathrm{T_2}$ は接点 $\mathrm{T_1}$ と直線 $y=x$ について対称になるので，$\mathrm{T_2}(e,\ \log_a e)$ である。

(3)　C_1 上に点 $\mathrm{P}(p,\ a^p)$，C_2 上に点 $\mathrm{Q}(a^q,\ q)$ をとり，$\triangle\mathrm{OPQ}$ が正三角形となるような場合を調べる。

$p\leqq 0$，$q\leqq 0$ のときは，$\angle\mathrm{POQ}>90^\circ$ から，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形にならない。

$p>0$，$q\leqq 0$ のときは，右図のように，C_2 上の点 $\mathrm{Q_0}(1,\ 0)$ をとり，ここで線分 $\mathrm{OQ_0}$ を原点 O まわりに 60° 回転すると，O と点 $\mathrm{Q_0}'\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を結ぶ線分に移る。このとき，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ から $\angle\mathrm{POQ}>60^\circ$ となり，$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形にならない。



$p\leqq 0$，$q>0$ のときは，$p>0$，$q\leqq 0$ のときと同様に考えると，$\angle\mathrm{POQ}>60^\circ$ から $\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形にならない。

以上より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ が正三角形となるのは $p>0$，$q>0$ のとき，すなわち点 P，Q がともに第 1 象限の点のときとなる。

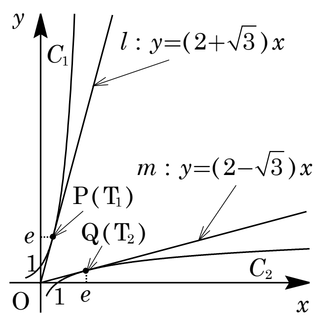
さて，$\triangle\mathrm{OPQ}$ が正三角形となるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ で，C_1 と C_2 は直線 $y=x$ について対称なので，P と Q は $y=x$ について対称になる。そして，$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$ から，線分 OP が x 軸となす角は $45^\circ\pm30^\circ$，すなわち 75° または 15° であり，

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=2+\sqrt{3}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{1}{\tan 75^\circ}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

そこで，線分 OP と 2 直線 $l: y=(2+\sqrt{3})x$，$m: y=(2-\sqrt{3})x$ の関係を調べる。

(i)　$k=2+\sqrt{3}\left(a=e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\right)$のとき

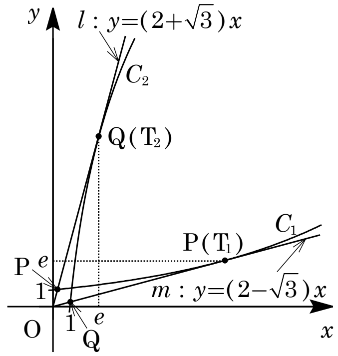


右図のように，接線OT_1が直線 l のときで，$\mathrm{P}=\mathrm{T}_1$以外に，直線 l, m 上に点 P がないので，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は 1 組である。

(ii)　$k>2+\sqrt{3}\left(a>e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\right)$のとき

直線 l, m 上に点 P がないので，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は 0 組である。

(iii)　$k=2-\sqrt{3}\left(a=e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}\right)$のとき



右図のように，接線OT_1が直線 m のときで，$\mathrm{P}=\mathrm{T}_1$以外に，直線 l 上に点 P が 2 個あり，直線 m 上にはないので，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は 3 組である。

(iv)　$0<k<2-\sqrt{3}\left(1<a<e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}\right)$のとき

直線 l 上に点 P が 2 個，直線 m 上にも点 P が 2 個あり，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は 4 組である。

(v)　$2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}\left(e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}<a<e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}\right)$のとき

直線 l 上に点 P が 2 個あり，直線 m 上にはないので，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は 2 組である。

(i)～(v)より，△OPQ が正三角形となる(P，Q)の数は，

$1<a<e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}$ のとき 4 組，$a=e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}$ のとき 3 組，$e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}}<a<e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}$ のとき 2 組

$a=e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}$ のとき 1 組，$a>e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}}$ のとき 0 組

［コメント］

指数関数と対数関数のグラフもとにした微分の応用問題です。(3)では，共有点の個数を調べる際に，下に凸のC_1を想像力をもとに外挿する必要があります。なお，条件に適する P, Q はともに第 1 象限という説明についてはアバウトですが……。