1

解答例のページへ

関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x\log(1+x)$ と定める。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(1+x)\,dx$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ とする。また a, b を $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ となる実数とする。このとき定積分 $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f(t)}\,dt$ と定める。このとき $y = P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい。関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して，$R(x) = \displaystyle\int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}\,dv$ と定めるとき，$R(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

空間の点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り $(1,\ -1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を l とし，点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り $(0,\ 1,\ -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする。

(1) P を l 上の点とし，Q を m 上の点とする。また直線 PQ は直線 l と直線 m に垂直であるとする。このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ。

(2) l 上に 2 点 $\mathrm{A}=(t,\ -t,\ 1)$，$\mathrm{B}=(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$ があり，m 上に 2 点 $\mathrm{C}=(1,\ t,\ 3-2t)$，$\mathrm{D}=(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$ があるとする。ただし，t は実数とする。四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする。$V(0)$ を求めよ。

(3) t が $t \geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

$0<p<1$ とする。表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う。

・ゲームの開始段階で点数は 0 点

・コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま

・2 回続けて裏が出たらゲームは終了

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする。

(1)　Q_1，Q_2 を p を用いて表せ。

(2)　Q_n を n と p を用いて表せ。

(3)　$0<x<1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

必要ならば $0<x<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nx^n=0$ であることを証明なしで使ってもよい。

(4)　無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

数列 $\{a_n\}$ を， $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定め，数列 $\{b_n\}$ を，$\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}$ により定める。ただし，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ であるものとする。

(1)　$n \geqq 2$ に対して，$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ を求めよ。

(2)　$m \geqq 1$ (m は整数)に対して，$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

(1)　関数 $f(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3}\ (t\neq 0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ。

(2)　実数 x, y, z が，条件

$$x<y<z\,,\ \ xyz\neq 0\,,\ \ x^3y^2-x^3=x^2y^3-y^3\,,\ \ y^3z^2-y^3=y^2z^3-z^3$$

を満たしながら動くとき，x が取り得る値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\log(1+x)\ (x\geqq 0)$ のとき，

$$\int f(x)\,dx=\int x\log(1+x)\,dx=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\int\Bigl(x-1+\frac{1}{1+x}\Bigr)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\Bigl\{\frac{x^2}{2}-x+\log(1+x)\Bigr\}+C$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C\ \text{（C は積分定数）}$$

(2)　$x=f(t)$ とおくと $t=g(x)$ である。このとき $dx=f'(t)dt$ で，$g(a)=1$ から $f(1)=a$，$g(b)=2$ から $f(2)=b$ となり，$x=a\to b$ のとき $t=1\to 2$ なので，

$$I=\int_a^b g(x)\,dx=\int_1^2 g(f(t))\cdot f'(t)\,dt=\int_1^2 tf'(t)\,dt$$
$$=\bigl[tf(t)\bigr]_1^2-\int_1^2 f(t)\,dt=2f(2)-f(1)-\Bigl[\frac{t^2-1}{2}\log(1+t)-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}\Bigr]_1^2$$
$$=2\cdot 2\log 3-\log 2-\frac{3}{2}\log 3+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4}$$

(3)　$P(x)=\int_0^x\sqrt{1+f(t)}\,dt\ (x\geqq 0)$ のとき，$P'(x)=\sqrt{1+f(x)}$ かつ $P(0)=0$

$v=P(u)$ とおくと $u=Q(v)$ であり，$v=P(Q(v))$ から両辺を v で微分すると，

$$1=P'(Q(v))Q'(v)\,,\quad \frac{1}{Q'(v)}=P'(Q(v))=P'(u)$$

そして，$dv=P'(u)du$，$v=0\to P(x)$ のとき $u=0\to x$ より，

$$R(x)=\int_0^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}\,dv=\int_0^x P'(u)\cdot P'(u)\,du=\int_0^x\bigl\{P'(u)\bigr\}^2du$$
$$=\int_0^x\{1+f(u)\}\,du=\bigl[u\bigr]_0^x+\Bigl[\frac{u^2-1}{2}\log(1+u)-\frac{u^2}{4}+\frac{u}{2}\Bigr]_0^x$$
$$=x+\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x$$

［コメント］

逆関数を題材にした定積分の問題です。(2)はときどき見かける問題ですが，(3)は初見でした。

2

問題のページへ

(1)　点$(0,\ 0,\ 1)$を通り方向ベクトル$\vec{u}=(1,\ -1,\ 0)$の直線lは，pを実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+p(1,\ -1,\ 0)=(p,\ -p,\ 1)$$

点$(1,\ 0,\ 3)$を通り方向ベクトル$\vec{v}=(0,\ 1,\ -2)$の直線mは，qを実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 3)+q(0,\ 1,\ -2)=(1,\ q,\ 3-2q)$$

これより，l上の点$\mathrm{P}(p,\ -p,\ 1)$，m上の点$\mathrm{Q}(1,\ q,\ 3-2q)$と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-p,\ q+p,\ 2-2p)$$

ここで，$\mathrm{PQ}\perp l$から$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=(1-p)-(q+p)=0$となり，$2p+q=1$ ………①

$\mathrm{PQ}\perp m$から$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=(q+p)-2(2-2q)=0$となり，$p+5q=4$ ………②

①②より，$p=\dfrac{1}{9}$，$q=\dfrac{7}{9}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{9},\ 1\right)$，$\mathrm{Q}\left(1,\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{13}{9}\right)$から，

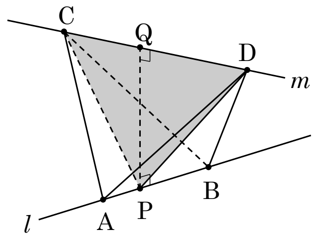
$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{4+4+1}=\frac{4}{3}$$

(2)　l 上の 2 点$\mathrm{A}(t,\ -t,\ 1)$，$\mathrm{B}(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$，$m$ 上の 2 点$\mathrm{C}(1,\ t,\ 3-2t)$，$\mathrm{D}(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$に対して，$t=0$のとき，

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ -2,\ 1),\ \mathrm{C}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{D}(1,\ 3,\ -3)$$

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

まず，$\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{4}{3}=2\sqrt{5}$



次に，点 A と平面 PCD の距離と点 B と平面 PCD の距離の和は，l と m のなす鋭角をθとしたとき，$\mathrm{AB}\sin\theta$と表せ，

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

これより，$\mathrm{AB}\sin\theta=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$となり，四面体 ABCD の体積$V(0)$は，

$$V(0)=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}}=4$$

(3)　(2)と同様に，$\mathrm{AB}=\sqrt{(2+\sin t)^2+(-2-\sin t)^2}=\sqrt{2}(2+\sin t)$

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(2+\cos t)^2+(-4-2\cos t)^2}=\sqrt{5}(2+\cos t)$$

まず，$\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}(2+\cos t)\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t)$となり，

$$\mathrm{AB}\sin\theta=\sqrt{2}(2+\sin t)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t)$$

四面体 ABCD の体積$V(t)$は，l上の 3 点 P, A, B の位置関係にかかわらず，

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t)\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t)=\frac{2}{3}(4+2\sin t+2\cos t+\sin t\cos t)$$

ここで，$s=\sin t+\cos t$ とおくと，$s^2=1+2\sin t\cos t$ から $\sin t\cos t=\dfrac{s^2-1}{2}$

そこで，$f(s)=\dfrac{2}{3}\left(4+2s+\dfrac{s^2-1}{2}\right)$ とすると，$V(t)=f(s)$ となり，

$$f(s)=\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(s+2)^2+1$$

t が $t\geqq 0$ を動くとき，$s=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ から $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ となる。

したがって，$V(t)$ は $s=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+3$，$s=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}+3$ をとる。

［コメント］

空間図形の問題です。(2)では四面体の各頂点の座標が複雑でないのですが，(3)との関係から，共通垂線 PQ の長さの利用を考え，△PCD を底面とみなして体積を計算しています。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ のコインを使って与えられた条件のゲームを行い，終わったときに 1 点となっているのは，以下，表を○，裏を●で表すと，「○●●」，「●○●●」から，この確率 Q_1 は，

$$Q_1 = p(1-p)^2 + p(1-p)^3 = p(1-p)^2(1+1-p) = p(1-p)^2(2-p)$$

同様に考え，終わったときに 2 点となっているのは，「○○●●」，「○●○●●」，「●○○●●」，「●○●○●●」から，この確率 Q_2 は，

$$Q_2 = pQ_1 + p(1-p)Q_1 = p(2-p)Q_1 = p^2(1-p)^2(2-p)^2$$

(2)　終わったときに $n+1$ 点となっているのは，終わったときに n 点となっている○と●のパターンの初めに，○を加えるか，または●○を加える場合から，

$$Q_{n+1} = pQ_n + p(1-p)Q_n = p(2-p)Q_n$$

これより，$Q_n = Q_1\{p(2-p)\}^{n-1}$ となり，

$$Q_n = p(1-p)^2(2-p)p^{n-1}(2-p)^{n-1} = (1-p)^2p^n(2-p)^n$$

(3)　$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k$ とおくと，$S_n - xS_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^{k+1}$ となり，

$$(1-x)S_n = 1\cdot x^0 + (x^1 + x^2 + \cdots + x^n) - (n+1)x^{n+1}$$

$0<x<1$ から，$S_n = \dfrac{1}{1-x}\left\{\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}\right\} = \dfrac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \dfrac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$

ここで，$n\to\infty$ のとき，$x^{n+1}\to 0$，$(n+1)x^{n+1}\to 0$ より，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \lim_{n\to\infty}S_n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(4)　$nQ_n = n(1-p)^2p^n(2-p)^n = n(1-p)^2\{p(2-p)\}^n$ から，$x = p(2-p)$ とおくと，

$$x = -p^2 + 2p = -(p-1)^2 + 1$$

すると，$0<p<1$ から $0<x<1$ となり，

$$\sum_{n=0}^{\infty}nQ_n = \sum_{n=0}^{\infty}n(1-p)^2x^n = (1-p)^2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n = (1-p)^2\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)x^n - x^n\}$$

ここで，$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \dfrac{1}{1-x}$ から，ともに収束するので，

$$\sum_{n=0}^{\infty}nQ_n = (1-p)^2\left\{\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right\} = (1-p)^2\cdot\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$= (1-p)^2\cdot\frac{p(2-p)}{(1-2p+p^2)^2} = \frac{p(2-p)}{(1-p)^2}$$

［コメント］

誘導が非常に丁寧な確率と極限の融合問題です。(2)は(1)から導いています。

4

問題のページへ

(1)　$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ から，$n \geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n - {a_{n+1}}^2 &= (a_{n+1} + a_n)a_n - {a_{n+1}}^2 = a_{n+1}a_n + {a_n}^2 - {a_{n+1}}^2 \\ &= a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) + {a_n}^2 = -a_{n+1}a_{n-1} + {a_n}^2 \\ &= -(a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2) \end{aligned}$$

すると，$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = (a_3a_1 - {a_2}^2)(-1)^{n-2} = (2\cdot1-1)(-1)^{n-2} = (-1)^n$ である。

(2)　$\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}\left(0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$のとき，$n \geqq 3$ で $a_n \geqq 2$ から $0 < b_n < \dfrac{\pi}{4}$ となり，

$$\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \frac{\tan b_{2m+1} + \tan b_{2m+2}}{1 - \tan b_{2m+1}\tan b_{2m+2}} = \frac{\dfrac{1}{a_{2m+1}} + \dfrac{1}{a_{2m+2}}}{1 - \dfrac{1}{a_{2m+1}}\cdot\dfrac{1}{a_{2m+2}}}$$

$$= \frac{a_{2m+1} + a_{2m+2}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}$$

すると，$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \dfrac{a_{2m+1}a_{2m} + a_{2m+2}a_{2m}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}$ となり，(1)の結果から，

$a_{2m+2}a_{2m} - {a_{2m+1}}^2 = (-1)^{2m+1} = -1$ であるので，

$$a_{2m}\cdot\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \frac{a_{2m+1}a_{2m} + {a_{2m+1}}^2 - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = \frac{a_{2m+1}(a_{2m} + a_{2m+1}) - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}$$

$$= \frac{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = 1$$

(3)　(2)の結果から，$\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \dfrac{1}{a_{2m}}$ となり，$\tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \tan b_{2m}$

$0 < b_{2m+1} + b_{2m+2} < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < b_{2m} < \dfrac{\pi}{2}$ から，$b_{2m+1} + b_{2m+2} = b_{2m}$ となり，

$$b_{2m+1} = b_{2m} - b_{2m+2} \quad (m \geqq 1)$$

ここで，$S_n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} b_{2m+1} = b_1 + \sum_{m=1}^{n} b_{2m+1} = b_1 + \sum_{m=1}^{n}(b_{2m} - b_{2m+2})$ とおくと，

$$S_n = b_1 + (b_2 - b_4) + (b_4 - b_6) + \cdots + (b_{2n} - b_{2n+2}) = b_1 + b_2 - b_{2n+2}$$

さて，$\tan b_1 = \tan b_2 = \dfrac{1}{1} = 1$ から，$b_1 = b_2 = \dfrac{\pi}{4}$ である。

また，a_n はすべて自然数で $1 = a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$ なので，$n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$，すなわち $\tan b_n = \dfrac{1}{a_n} \to 0$ であることより，$b_n \to 0$ となり，

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - b_{2n+2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

［コメント］

有名な数列を対象とした問題です。(1)は実験をすると結論が推測できますので，それと漸化式をドッキングするように式変形をしました。

5

問題のページへ

(1)　$f(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^3}\ (t\neq 0)$ に対して，

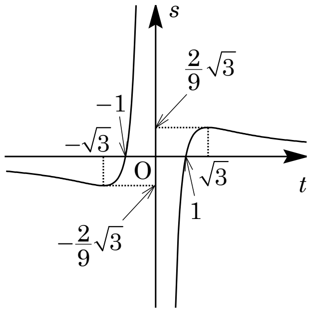
$$f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t^4}=-\frac{t^2-3}{t^4}$$

ここで，$f(-t)=-f(t)$ から，$t>0$ で $f(t)$ の増減を調べると右表のようになり，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f(t)$	×	$+$	0	$-$
$f(t)$	×	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘

$$\lim_{t\to+0}f(t)=-\infty,\ \lim_{t\to\infty}f(t)=0$$

すると，$s=f(t)$ のグラフは，原点対称であることに留意して描くと，右図のようになる。



(2)　$xyz\neq 0$ のもとで，$x^3y^2-x^3=x^2y^3-y^3$ から，

$$x^3(y^2-1)=y^3(x^2-1),\ \frac{y^2-1}{y^3}=\frac{x^2-1}{x^3}\cdots\cdots①$$

また，$y^3z^2-y^3=y^2z^3-z^3$ から，$y^3(z^2-1)=z^3(y^2-1)$ となり，

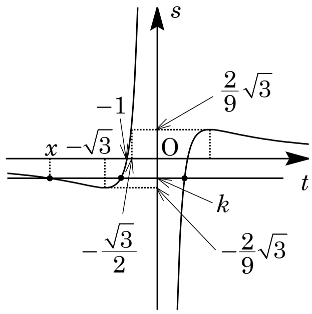
$$\frac{z^2-1}{z^3}=\frac{y^2-1}{y^3}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{x^2-1}{x^3}=\dfrac{y^2-1}{y^3}=\dfrac{z^2-1}{z^3}$ となり，この式の値を k とおくと，

$$f(x)=f(y)=f(z)=k\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x<y<z$ から，$s=f(t)$ のグラフと直線 $s=k$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の範囲を求めると，

$$-\frac{2}{9}\sqrt{3}<k<0,\ 0<k<\frac{2}{9}\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots④$$



このとき，$s=f(t)$ と $s=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ の共有点の t 座標は，

$$\frac{t^2-1}{t^3}=\frac{2}{9}\sqrt{3},\ t^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}(t^2-1)=0$$

すると，$(t-\sqrt{3})^2\left(t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ となり，$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}$ である。

以上より，④のもとで，共有点のうち t 座標が最小の x が取り得る範囲は，

$$x<-\sqrt{3},\ -1<x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［コメント］

微分の方程式への応用問題です。見かけに反して，基本的な内容です。