$\boxed{1}$

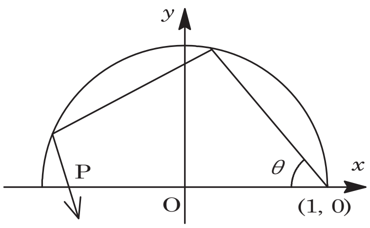
解答解説のページへ

$(x,\ y)$平面において，半円：$x^2+y^2=1$，$y\geqq 0$ の内側が鏡になっているとする。図のように，定点$(1,\ 0)$より，x軸となす角θで光線が発射され，2 回半円に反射したのち，x軸上の点 P を通過したとする。

(1)　このような状況が起こるためのθの範囲を求めよ。

(2)　P の座標をθを用いて表せ。

(3)　θが(1)の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。



$\boxed{2}$

解答解説のページへ

(1)　極座標表示された複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$\left|1 + z + \cdots + z^n\right|^2$ を r，θ，n を用いて表せ。

(3)　複素数 z が $\left|z + \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し，

$$\left|1 + z + \cdots + z^n\right| < 1$$

が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし，高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

n は 2 以上の自然数とする。関数 $y=e^x$ ……(ア), $y=e^{nx}-1$ ……(イ)について以下の問いに答えよ。

(1) (ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただ一つの交点をもつことを示せ。

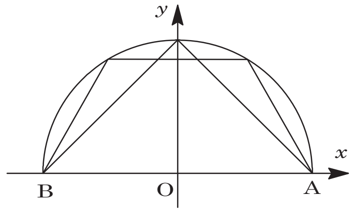
(2) (1)で得られた交点の座標を$(a_n,\ b_n)$としたとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

(3) 第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

1

問題のページへ

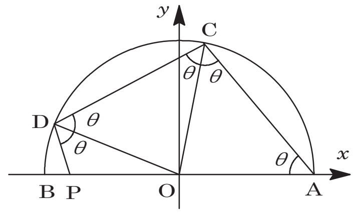
(1)　A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$とおく。



まず，A から光線が発射され，半円で 1 回反射して B に到達するとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$となる。また，2 回反射して B に到達するとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$となる。

よって，条件を満たすθは，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$である。

(2)　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{COD}=\pi-2\theta$より，



$$\angle\mathrm{DOP}=\pi-2(\pi-2\theta)=4\theta-\pi$$
$$\angle\mathrm{DPO}=\pi-(\theta+4\theta-\pi)=2\pi-5\theta$$

△DPO に正弦定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(2\pi-5\theta)}$$
$$\mathrm{OP}=\frac{\sin\theta}{\sin(2\pi-5\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}$$

点 P はx軸上の負の部分にあるので，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin5\theta},\ 0\right)$となる。

(3)　$i^0=1$として，$\cos5\theta+i\sin5\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_k\cos^{5-k}\theta\cdot\sin^k\theta\cdot i^k$

$$\sin5\theta={}_5\mathrm{C}_1\cos^4\theta\sin\theta-{}_5\mathrm{C}_3\cos^2\theta\sin^3\theta+{}_5\mathrm{C}_5\sin^5\theta$$
$$=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$$

(2)より，
$$x=\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}=\frac{1}{5\cos^4\theta-10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}$$
$$=\frac{1}{5\cos^4\theta-10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1}=\frac{1}{16\left(\cos^2\theta-\dfrac{3}{8}\right)^2-\dfrac{5}{4}}$$

(1)より，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$なので$\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{5}{4}\leqq16\left(\cos^2\theta-\dfrac{3}{8}\right)^2-\dfrac{5}{4}<-1$から$-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$となる。すなわち，点 P は$x$軸上の$-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$の部分を動く。

［解 説］

やや直観的すぎるかもしれませんが，(1)は最初に考えたように書きました。また，(3)は微分するとたいへんな計算になりましたので，方針転換した後の解です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ より，$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|^2<\dfrac{1}{4}$ なので，$z+\dfrac{1}{2}=r\cos\theta+\dfrac{1}{2}+ir\sin\theta$ から，

$$\left(r\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+r^2\sin^2\theta<\frac{1}{4},\ \ r^2+r\cos\theta<0$$

$r>0$ より，$r+\cos\theta<0$

(2)　(i)　$z=1$ のとき　$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|n+1\right|^2=(n+1)^2$

(ii)　$z\neq1$ のとき　$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}\right|^2=\dfrac{\left|z^{n+1}-1\right|^2}{\left|z-1\right|^2}$

$$\begin{aligned}\left|z^{n+1}-1\right|^2&=\left|r^{n+1}\left\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\right\}-1\right|^2\\&=\left|r^{n+1}\cos(n+1)\theta-1+ir^{n+1}\sin(n+1)\theta\right|^2\\&=\left\{r^{n+1}\cos(n+1)\theta-1\right\}^2+\left\{r^{n+1}\sin(n+1)\theta\right\}^2\\&=r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1\end{aligned}$$

$$\left|z-1\right|^2=r^2-2r\cos\theta+1$$

したがって，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\dfrac{r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}$

(3)　(2)より，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \frac{r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}<1\\&\Leftrightarrow\ r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1<r^2-2r\cos\theta+1\\&\Leftrightarrow\ r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta-r^2+2r\cos\theta<0\\&\Leftrightarrow\ r^2(r^{2n}-1)-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0\end{aligned}$$

ここで, (1)より，$0<r<-\cos\theta\leqq1$ なので $r^{2n}-1<0$ となり，$r^2(r^{2n}-1)<0$

また，$r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta>r^n\cos(n+1)\theta+r\geqq r(-r^{n-1}+1)>0$

$$-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0$$

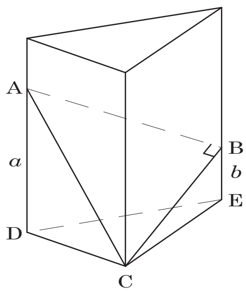
以上より，$r^2(r^{2n}-1)-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0$

すなわち，$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ のとき $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$ が成立する。

［解　説］

問題文が曖昧なのですが，ここでは $r>0$ として解を作りました。なお, (3)の不等式の証明には，いろいろなことを考え，時間がかかってしまいました。最後は押さえ込みで処理しました。

3　問題のページへ



断面の直角三角形の 1 つの頂点 C を三角柱の底面上におき，AD $=a$，BE $=b$ として右図のように設定する。

$$\mathrm{AC}=\sqrt{a^2+1},\ \mathrm{BC}=\sqrt{b^2+1}$$
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(a-b)^2+1}$$

$0\leqq b\leqq a\leqq 2$ とすると，AC が最大辺となり，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ となる。

三平方の定理を適用して，$a^2+1=b^2+1+(a-b)^2+1$

$$2b^2-2ab+1=0,\ a=b+\frac{1}{2b}$$

すると，$0\leqq b\leqq b+\dfrac{1}{2b}\leqq 2$ より，$2b^2-4b+1\leqq 0$ となり，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

このとき，$\triangle$ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+1}\sqrt{(a-b)^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+1)\left(\frac{1}{4b^2}+1\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{1}{4b^2}+\frac{5}{4}}$$

ここで，$f(b)=b^2+\dfrac{1}{4b^2}+\dfrac{5}{4}$ とおくと，$f'(b)=2b-\dfrac{1}{2b^3}=\dfrac{4b^4-1}{2b^3}$

さて，$f(b)=\left(b+\dfrac{1}{2b}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ と変形すると，

b	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{4}$$
$$=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2\pm\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{4}=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

増減表から $\dfrac{9}{4}\leqq f(b)\leqq\dfrac{17}{4}$ となるので，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{4}}\leqq S\leqq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17}{4}}$ より，

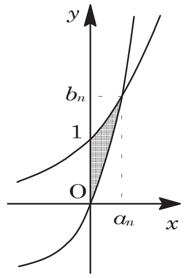
$$\frac{3}{4}\leqq S\leqq\frac{\sqrt{17}}{4}$$

［解 説］

$b=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ のとき，$f(b)$ の値をそのまま計算するとたいへんそうなので工夫をしました。しかし，いま考えると $f(b)=b+\dfrac{1}{2b}$ と設定したほうがよかったかもしれません。

4

問題のページへ



(1)　$y=e^x$ ……(ア)，$y=e^{nx}-1$ ……(イ)

(ア)(イ)より，$e^x=e^{nx}-1$，$e^{nx}-e^x-1=0$

$f(x)=e^{nx}-e^x-1$とおくと，

$$f'(x)=ne^{nx}-e^x=e^x\left\{ne^{(n-1)x}-1\right\}$$

$x\geqq 0$ において，$n-1\geqq 1$より$ne^{(n-1)x}\geqq n>1$なので$f'(x)>0$となり，$f(x)$は単調増加となる。

また，$f(0)=-1<0$，さらに，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e-e^{\frac{1}{n}}-1\geqq e-e^{\frac{1}{2}}-1$

ここで，$(e-1)^2-e=e^2-3e+1=\left(e-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}>1.2^2-\dfrac{5}{4}>0$ となるので，$e-1>e^{\frac{1}{2}}$から，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$である。

以上より，$f(x)=0$は $0<x<\dfrac{1}{n}$において，ただ一つの解をもつ。すなわち，(ア)と(イ)のグラフは第1象限においてただ一つの交点をもつ。

(2)　(1)より，$0<a_n<\dfrac{1}{n}$なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(ア)(イ)より，$b_n=e^{a_n}$，$b_n=e^{na_n}-1$

$e^{a_n}=e^{na_n}-1$，$na_n=\log(e^{a_n}+1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\log(e^{a_n}+1)=\log 2$

(3)　$\displaystyle S_n=\int_0^{a_n}\left\{e^x-(e^{nx}-1)\right\}dx=\left[e^x-\frac{1}{n}e^{nx}+x\right]_0^{a_n}=e^{a_n}-1-\frac{1}{n}(e^{na_n}-1)+a_n$

$\displaystyle nS_n=n(e^{a_n}-1)-e^{na_n}+1+na_n=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\cdot na_n-e^{na_n}+1+na_n$

(2)より, $n\to\infty$のとき，$a_n\to 0$より$\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\to 1$，さらに$na_n\to\log 2$なので,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n=1\cdot\log 2-e^{\log 2}+1+\log 2=2\log 2-1$

［解 説］

最初，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$の代わりに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$から(1)の結論を導きましたが，それでは(2)の$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$が求まりません。この$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$の値が0であることはグラフから明らかなので，いっそう手間取りました。