1

解答解説のページへ

実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-a\cos x|\,dx$ を考える。$f(a)$ の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

空間内にある 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が$(0,\ 0,\ 1)$であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$にある光源が xy 平面上に作るこの三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を自然数とする。

(1)　次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

(2)　関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき，$\displaystyle\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$ および $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(3)　(2)の x_n に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n$ を求めよ。

1

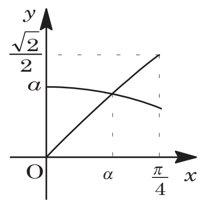
問題のページへ

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-a\cos x|\,dx$ に対して,

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin x-a\cos x\geqq 0$ なので,

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-a\cos x)\,dx=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$0<x<\frac{\pi}{4}$ における $\sin x-a\cos x=0$ の解を $x=\alpha$ とおくと,



$$\sin\alpha=a\cos\alpha\ ,\ \ a=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$f(a)=\int_0^{\alpha}-(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-a\cos x)\,dx$$

$$=-\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\cos\alpha+2a\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}a-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(a)=-2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}+2\sin\alpha+2a\cos\alpha\frac{d\alpha}{da}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}+2\sin\alpha+2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ここで，(*)より $0<a<1$ のとき $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ なので，$\sin\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$ とすると，$0<\alpha_0<\frac{\pi}{4}$ となる。

a	0	$\cdots$	a_0	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$	↘		↗	$\sqrt{2}-1$

$$\cos\alpha_0=\sqrt{1-\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{4}\ ,\ \ a_0=\tan\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$f(a_0)=2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

(iii)　$a\geqq 1$ のとき　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin x-a\cos x\leqq 0$ なので,

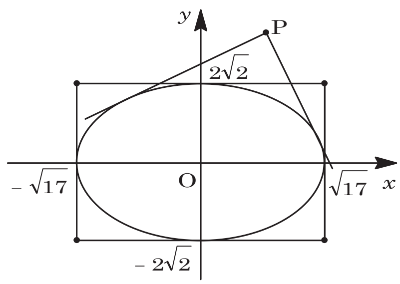
$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x-a\cos x)\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}a-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)(iii)より，$f(a)$ は連続関数なので，その最小値は $\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ である。

[解 説]

$f'(a)$ を計算したところ，(*)の関係式のおかげで，予想以上に簡単な式となりました。

2　問題のページへ



まず，楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ……①に対して，4 点 $\pm(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$，$\pm(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$ から①に引いた 2 本の接線は明らかに直交する。

次に，上記の 4 点以外の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る接線は，その傾きを m とすると，

$$y-b=m(x-a)$$

$$y=mx-ma+b\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$8x^2+17(mx-ma+b)^2=17\cdot 8$

$$(17m^2+8)x^2-34m(ma-b)x+17(ma-b)^2-17\cdot 8=0$$

重解をもつことより，

$$D/4=17^2m^2(ma-b)^2-(17m^2+8)\{17(ma-b)^2-17\cdot 8\}=0$$

$$17m^2(ma-b)^2-(17m^2+8)\{(ma-b)^2-8\}=0$$

$$17\cdot 8m^2-8(ma-b)^2+64=0,\ (17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$17-a^2\neq 0$ より，③の実数解を $m=m_1,\ m_2$ とすると，2 本の接線が直交する条件は，解と係数の関係を用いて，

$$m_1m_2=-1,\ \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1,\ a^2+b^2=25\ \cdots\cdots\cdots④$$

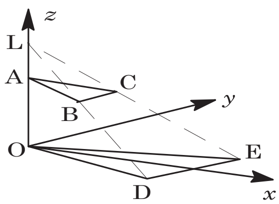
点 P が 4 点 $\pm(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$，$\pm(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$ のときも④をみたすので，これより点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の軌跡は，円 $x^2+y^2=25$ である。

[解　説]

有名問題です。方程式 $D=0$ をうまく計算していくことがすべてです。

3

問題のページへ



2 点 B, C を xz 平面に関して対称な点とすると，BC = 1 より，$\mathrm{B}\left(a,\ -\dfrac{1}{2},\ b\right)$，$\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{1}{2},\ b\right)$とおける。

AB = AC = 1 より，$a^2+\dfrac{1}{4}+(b-1)^2=1$ ………(＊)

ここで，$\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ より，直線 LB は，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})+t\left(a,\ -\frac{1}{2},\ b-1-\sqrt{2}\right)$$

xy 平面と交わるのは，$z=0$ から $1+\sqrt{2}+t(b-1-\sqrt{2})=0$，$t=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ のときである。$t_0=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ とおくと，$x=t_0a$，$y=-\dfrac{1}{2}t_0$ から，$\mathrm{D}\left(t_0a,\ -\dfrac{1}{2}t_0,\ 0\right)$となる。同様にして $\mathrm{E}\left(t_0a,\ \dfrac{1}{2}t_0,\ 0\right)$となり，△ODE の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot t_0\cdot t_0a=\frac{1}{2}t_0{}^2a=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}\right)^2a$$

(＊)より，$a^2+\dfrac{1}{4}+b^2-2b=0$，$a^2=-b^2+2b-\dfrac{1}{4}=-(b-1)^2+\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}\right)^2\sqrt{-(b-1)^2+\frac{3}{4}}$$

さて，$1+\sqrt{2}-b=u$ とおくと，$\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$$S=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2u^2}\sqrt{-(\sqrt{2}-u)^2+\frac{3}{4}}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{\frac{-4(u-\sqrt{2})^2+3}{u^4}}$$

そこで，$f(u)=\dfrac{-4(u-\sqrt{2})^2+3}{u^4}$ とおくと，$S=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{f(u)}$

$$f'(u)=\frac{-8(u-\sqrt{2})u^4-\{-4(u-\sqrt{2})^2+3\}\cdot 4u^3}{u^8}$$

$$=\frac{8u^2-24\sqrt{2}u+20}{u^5}$$

$$=\frac{4(\sqrt{2}u-1)(\sqrt{2}u-5)}{u^5}$$

u	$\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	…	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	…	$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(u)$		＋	0	－	
$f(u)$		↗	4	↘	

したがって，$u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$f(u)$ は最大値 4 をとり，S の最大値は $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\times\sqrt{4}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$ である。

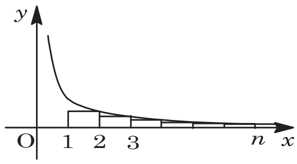
[解 説]

相似を利用して図形的に解こうか，方程式を立てて代数的に解こうか迷いました。

4

問題のページへ

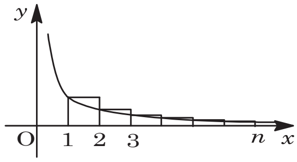
(1)　$y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ は単調減少関数なので,



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

また $n\geqq 2$ で, $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}>\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\log n$$

よって, $\dfrac{1}{n}+\log n<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\log n$

$$\frac{1}{n\log n}+1<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{\log n}+1$$

$n\to\infty$ のとき, $\dfrac{1}{n\log n}\to 0$, $\dfrac{1}{\log n}\to 0$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$

(2)　$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ とおくと,

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)$$
$$+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$x=x_n$ で極値をとることより, $f'(x_n)=0$ となり,

$$(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n)+x_n(x_n-2)\cdots(x_n-n)$$
$$+\cdots+x_n(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n+1)=0$$

両辺÷$x_n(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n)$ から,

$$\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-2}+\cdots+\frac{1}{x_n-n}=0$$

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて, k を $0\leqq k\leqq n$ の整数とすると,

$$f'(k)=k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots\{-(n-k)\}=(-1)^{n-k}k!(n-k)!$$

これより, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $\cdots$, $f'(n-1)$, $f'(n)$ は順に符号が変化する。また, $f'(x)$ は n 次式から, $f'(x)=0$ の実数解は n 個以下である。すると, 区間 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $\cdots$, $(n-1,\ n)$ に 1 つずつ実数解をもつことになる。

その最小の解を x_n とすると, $0<x_n<1$ となり, ①より $\dfrac{1}{x_n}\geqq\dfrac{1}{1-x_n}$ である。

よって, $1-x_n\geqq x_n$ より $x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ となり, まとめて $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ である。

(3)　①より, $\dfrac{1}{x_n\log n}=\dfrac{1}{\log n}\left(\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}\right)\cdots\cdots\cdots②$

(2)より, $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ なので, $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}$

$$\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}\leqq\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}<2+1+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

②より，$\dfrac{1}{\log n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{x_n\log n}<\dfrac{1}{\log n}\left(2+1+\cdots+\dfrac{1}{n-1}\right)$

$$\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{x_n\log n}<\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

(1)より, $n\to\infty$のとき，$\dfrac{1}{\log n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\to 1$ なので，$\dfrac{1}{x_n\log n}\to 1$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n=1$

［解 説］

(2)の結論は，$f(x)$のグラフを考えると感覚的にはわかるのですが，それを証明しようとすると，時間がかかってしまいます。本年度の問題で最も方針の立てにくいものでした。