1

解答解説のページへ

(1)　3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx$ $(a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2)　(1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。C と l_1 が囲む部分の面積を S_1，C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この 2 つの面積比 $S_1:S_2$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 辺の長さの比が$1:a\ (a>1)$の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの操作を続ける。たとえば，$a=3$，$a=\dfrac{3}{2}$の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1)　3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

(2)　n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

△ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x\ (0 \leqq x < 1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y\ (0 \leqq y < 1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が△AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする）

4

解答解説のページへ

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2)　$f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$C: y=-x^3+ax^2+bx$ ……①, 原点を通る直線 $y=kx$ ……②とおく。

①②より, $x^3-ax^2+(k-b)x=0$, $x=0$ または $x^2-ax+(k-b)=0$ ………③

①と②が 2 点を共有する条件は, 次の 2 つの場合がある。

(i)　③が 0 以外の重解をもつとき

$D=a^2-4(k-b)=0$ より, $k=b+\dfrac{a^2}{4}$

このとき③の解は $x=\dfrac{a}{2}>0$ となり, 条件に適する。

(ii)　③が異なる 2 つの実数解をもち, その 1 つが 0 のとき

③に $x=0$ を代入して, $k-b=0$, $k=b$

このとき③の解は $x=0$, $x=a>0$ となり, 条件に適する。

(i)(ii)より, $y=\left(b+\dfrac{a^2}{4}\right)x$, $y=bx$

(2)　$l_1: y=\left(b+\dfrac{a^2}{4}\right)x$ ……④, $l_2: y=bx$ ……⑤より, ①と④の共有点は,

$$-x^3+ax^2+bx=\left(b+\frac{a^2}{4}\right)x,\ x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x=0,\ x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

これより, 共有点の x 座標は $x=0$, $\dfrac{a}{2}$ となり, $a>0$ から,

$$S_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\left(x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-a\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{192}a^4$$

また, ①と⑤の共有点は, $-x^3+ax^2+bx=bx$, $x^2(x-a)=0$, $x=0$, a

$$S_2=\int_0^{a}-(x^3-ax^2)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}-a\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{a}=\frac{1}{12}a^4$$

したがって, $S_1:S_2=\dfrac{1}{192}a^4:\dfrac{1}{12}a^4=1:16$

［解 説］

同じ題材で, センター試験に出題されても不思議はないような問題です。ただし, 10 年ほど前の話としてですが。

2

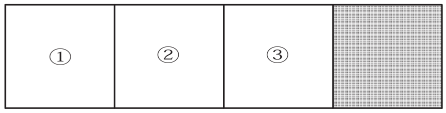
問題のページへ

(1)　縦の長さが 1, 横の長さが a の長方形を考えると, $a>1$ より, 1 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さは 1 である。また, 3 回で操作が終わるため, 3 回目に取り去る正方形と, 残った正方形は同じ大きさである。

　ここで, n 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さを l_n, 最後に残った正方形の 1 辺の長さを L とすると,

$$1=l_1\geqq l_2\geqq l_3=L$$

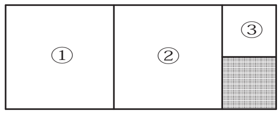
(i)　$l_1=l_2=l_3$ のとき



$l_1=l_2=l_3=L=1$ なので, 右図から,

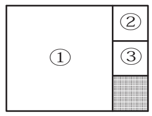
$a=4$

(ii)　$l_1=l_2>l_3$ のとき



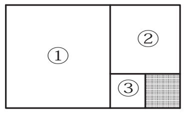
$1=l_1=l_2>l_3=L$ なので, 右図から, $a=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

(iii)　$l_1>l_2=l_3$ のとき



$1=l_1>l_2=l_3=L$ なので, 右図から, $a=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

(iv)　$l_1>l_2>l_3$ のとき



$1=l_1>l_2>l_3=L$ なので, 右図から, $a=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$

(2)　a が最大となるのは $1=l_1=l_2=l_3=\cdots=l_n=L$ のときである。

このとき, $a=n+1$ となる。

a が最小となるのは $1=l_1>l_2=l_3=\cdots=l_n=L$ のときである。

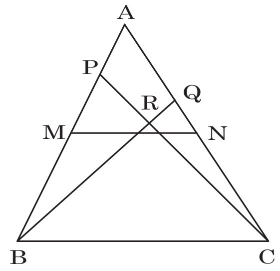
このとき, $l_2=l_3=\cdots=l_n=L=\dfrac{1}{n}$ より, $a=1+\dfrac{1}{n}$ となる。

[解 説]

　答は直観的にわかるのですが, それをどのように記述するとよいのか, 迷います。上の解答例では直観的な部分を残しています。

3

問題のページへ



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は1次独立なので, t, sを実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

RはPC上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{t}{x}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(x \neq 0)$より,

$$\frac{t}{x} + s = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

RはBQ上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{s}{y}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(y \neq 0)$より,

$$t + \frac{s}{y} = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①から$s = 1 - \dfrac{t}{x}$として，②に代入すると，$t + \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{t}{x}\right) = 1$

$$\frac{1-xy}{xy}t = \frac{1-y}{y},\quad t = \frac{x(1-y)}{1-xy} \cdots\cdots ③,\quad s = 1 - \frac{1}{x}\cdot\frac{x(1-y)}{1-xy} = \frac{y(1-x)}{1-xy} \cdots\cdots ④$$

なお，③④から，$x = 0$のときは$(t,\ s) = (0,\ y)$，$y = 0$のときは$(t,\ s) = (x,\ 0)$となり，条件を満たす。

さて，点Rは△AMNの内部または周上にあることより,

$$t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ t + s \leqq \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 1$，$0 \leqq y < 1$より，$t \geqq 0$，$s \geqq 0$は満たしているので，$t + s \leqq \dfrac{1}{2}$より,

$$\frac{x(1-y)}{1-xy} + \frac{y(1-x)}{1-xy} \leqq \frac{1}{2},\quad 2x(1-y) + 2y(1-x) \leqq 1 - xy$$

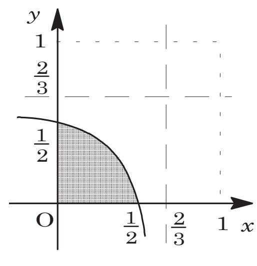
$$(3x-2)y \geqq 2x - 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$3x - 2 > 0$ $\left(x > \dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤より$y \geqq \dfrac{2x-1}{3x-2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3(3x-2)}$

$3x - 2 = 0$ $\left(x = \dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤は成立しない。

$3x - 2 < 0$ $\left(x < \dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤より$y \leqq \dfrac{2x-1}{3x-2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3(3x-2)}$

以上，まとめて図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含まれる。



この領域の面積をSとすると,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3(3x-2)}\right\}dx = \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\log|3x-2|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\left(\log\frac{1}{2} - \log 2\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\log 2$$

[解　説]

ベクトルの標準的な問題です。計算量も適当です。

4

問題のページへ

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=x^2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり，$x^3f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると，$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3f_k^{(2)}(x)$ より，$f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より，$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて，$f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると，$a_1=1$ で，$f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると，

$$a_{n+1}=n(n+1)a_n$$

$n\geqq 2$ で，$a_n=a_1(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdots(n-1)n=(n-1)!\,n!$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=0!1!=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(n-1)!\,n!$

(2)　$g_n(x)$ を x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として，

$$f_n(x)=g_n(x)+p_nx^4+q_nx^3+r_nx^2+s_nx+t_n$$

すると条件より，

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=f_n(x)+x^3\{g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n\}\\&=f_n(x)+x^3g_n^{(2)}(x)+12p_nx^5+6q_nx^4+2r_nx^3\end{aligned}$$

ここで x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項を比べると，

$$p_{n+1}=p_n+6q_n\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=q_n+2r_n\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=r_n\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=s_n\cdots\cdots④,\quad t_{n+1}=t_n\cdots\cdots⑤$$

また，$f_1(x)=x^2$ より，$p_1=q_1=0$，$r_1=1$，$s_1=t_1=0$ となり，

③より $r_n=1$，④⑤より $s_n=t_n=0$

②に代入して，$q_{n+1}=q_n+2$ より，$q_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

さらに①に代入して，$p_{n+1}=p_n+12(n-1)$ より, $n\geqq 2$ で,

$$p_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}12(k-1)=6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると，$p_1=0$ となり成立する。

よって，$f_n^{(1)}(x)=g_n^{(1)}(x)+4p_nx^3+3q_nx^2+2r_nx+s_n$ より，$f_n^{(1)}(0)=s_n=0$

$f_n^{(2)}(x)=g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n$ より，$f_n^{(2)}(0)=2r_n=2$

$f_n^{(3)}(x)=g_n^{(3)}(x)+24p_nx+6q_n$ より，$f_n^{(3)}(0)=6q_n=12(n-1)$

$f_n^{(4)}(x)=g_n^{(4)}(x)+24p_n$ より，$f_n^{(4)}(0)=24p_n=144(n-1)(n-2)$

［解 説］

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。