1　　解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とする。

(1)　区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2)　区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$, $g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$

を証明せよ。

(2)　正の整数 m, n が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \leqq \int_0^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$$

を証明せよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回くり返す。まず, P を投げて表が出れば Q を, 裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて, 表が出れば赤玉を, 裏が出れば白玉をつぼの中に入れる。

(1) n 回ともコイン Q を選び, つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n = 2004$, $p = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{1}{5}$ のとき, つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ。

4

解答解説のページへ

$0<r<1$ とする。空間において，点$(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 r の球と点$(1,\ 0,\ 0)$を中心とする半径$\sqrt{1-r^2}$ の球との共通部分の体積を$V(r)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$V(r)$を求めよ。

(2)　r が $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$を最大にする r の値および$V(r)$の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ より，$f'(x)=\dfrac{4x^3(x-a)^3-x^4\cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6}=\dfrac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$

これより，$f(x)$ の増減は，右の表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ である。

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$\dfrac{256}{27}a$	$\nearrow$

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より，

$$g'(x)=\frac{-2}{(x-a)^3}+\frac{3b}{x^4}=\frac{-2x^4+3b(x-a)^3}{x^4(x-a)^3}$$

ここで，$h(x)=-2x^4+3b(x-a)^3$ とおくと，$a<x$ で $h(x)$ の符号と $g'(x)$ の符号は一致し，

$$h(x)=-2(x-a)^3\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3b}{2}\right\}=-2(x-a)^3\left\{f(x)-\frac{3b}{2}\right\}$$

(i)　$\dfrac{3b}{2}\leqq\dfrac{256}{27}a\left(b\leqq\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

$a<x$ において，$f(x)-\dfrac{3b}{2}\geqq 0$ なので，$h(x)\leqq 0$ すなわち $g'(x)\leqq 0$ となる。

よって，$g(x)$ は単調減少するので，$g(x)$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線は存在しない。

(ii)　$\dfrac{3b}{2}>\dfrac{256}{27}a\left(b>\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

(1)より，$f(x)-\dfrac{3b}{2}=0$ は $a<x$ で異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ である。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$g(x)$ は $a<x$ で連続なので，このグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b>\dfrac{512}{81}a$ である。

［解　説］

(2)で関数 $h(x)$ を設定しましたが，振り返ってみると冗長でした。$g'(x)$ のまま同じように処理ができます。

2

問題のページへ

(1)　まず, 積分区間$0 \leqq x \leqq m\pi$をm等分して,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $t = x-(k-1)\pi$とおくと,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big)g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big)dt$$

さて, $\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin t$, $\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\cos t$と表すことができ, さらに$f(x)$, $g(x)$は偶関数より,

$$f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big) = f\big((-1)^{k-1}\sin t\big) = f(\sin t)$$
$$g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big) = g\big((-1)^{k-1}\cos t\big) = g(\cos t)$$

よって, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt \cdots\cdots\cdots ②$

①②より, $\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$

(2)　$\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$として, $nx = t$とおくと,

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

ここで, $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$において, $\displaystyle\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geqq 0$なので,

$$I_n \geqq \frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ③$$

$$I_n \leqq \frac{1}{n}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ④$$

さて, $f(x) = |x|$, $\displaystyle g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$とおくと, $f(x)$, $g(x)$は連続な偶関数なので, (1)の結論から,

$$\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして, $\displaystyle\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑥$

③〜⑥より, $\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3)　まず, $\cos x = u$とおくと,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{1}{(1+u^2)^2}(-du) = 2\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

さらに，$u=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

そこで, (2)の結論から,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$n\to\infty$のとき$m\to\infty$となるので，はさみうちの原理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \lim_{m\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

［解 説］

(3)の極限値が到達点となりますが，このために与えられた誘導の意味を考えながら，(1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが，演習する価値の大きな一題です。

3

問題のページへ

(1)　コイン Q を選び，つぼの中に赤玉が入る確率は pq，白玉が入る確率は $p(1-q)$ より，つぼの中に赤玉が k 個，白玉が $n-k$ 個入っている確率は，

$${}_n\mathrm{C}_k(pq)^k\{p(1-q)\}^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k p^n q^k(1-q)^{n-k}$$

(2)　コイン R を選び，つぼの中に赤玉が入る確率は $(1-p)r$ なので，コイン Q を選んだ場合も合わせて，つぼの中に赤玉が入る確率は，

$$pq+(1-p)r = pq-pr+r$$

したがって，つぼの中が赤玉だけとなる確率は，$(pq-pr+r)^n$ である。

(3)　つぼの中に赤玉が k 個，白玉が $n-k$ 個入っている確率を P_k とすると，

$$P_k = {}_n\mathrm{C}_k(pq-pr+r)^k\{1-(pq-pr+r)\}^{n-k}$$

$n=2004$，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$r=\dfrac{1}{5}$ のとき，

$$P_k = {}_{2004}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}\quad(0\leqq k\leqq 2004)$$

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\dfrac{2004!}{(k+1)!(2003-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2003-k}}{\dfrac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-k}} = \frac{7}{13}\cdot\frac{2004-k}{k+1}$$

そこで，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1$ とすると，$7(2004-k)>13(k+1)$ から，$k<700+\dfrac{3}{4}$ となる。

すると，$k\leqq 700$ のとき $P_{k+1}>P_k$，$k\geqq 701$ のとき $P_{k+1}<P_k$ となり，

$$P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots\cdots>P_{2003}>P_{2004}$$

よって，P_{701} が最大となり，赤玉が 701 個入っている場合が最も起こりやすい。

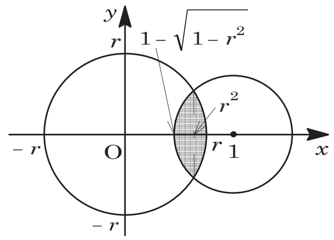
［解 説］

確率の最大・最小に関する頻出問題です。(1)の確率は，$p^n\times{}_n\mathrm{C}_k q^k(1-q)^{n-k}$ とみても OK です。

4

問題のページへ

(1)　2 つの円 $x^2+y^2=r^2$ と $(x-1)^2+y^2=1-r^2$ の共通部分を x 軸のまわりに回転したときにできる立体の体積が $V(r)$ である。



まず, 2 つの円の共有点の x 座標は,

$$(x-1)^2+(r^2-x^2)=1-r^2$$

これより，$x=r^2$ となり,

$$V(r)=\pi\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)\,dx+\pi\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r^2}^{r}=r^2(r-r^2)-\frac{1}{3}(r^3-r^6)$

$$=\frac{1}{3}r^6-r^4+\frac{2}{3}r^3$$

$$\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx=\left[(1-r^2)x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}$$

$$=(1-r^2)\left(r^2-1+\sqrt{1-r^2}\right)-\frac{1}{3}\left\{(r^2-1)^3+(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\right\}$$

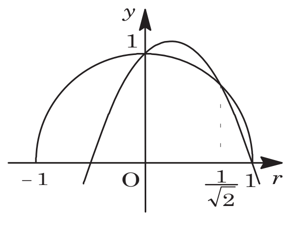
$$=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}(1-r^2)^3-(1-r^2)^2=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{3}r^6+r^2-\frac{2}{3}$$

以上より，$V(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-3r^4+2r^3+3r^2-2\right\}$

(2)　(1)より，$V'(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2\cdot\dfrac{3}{2}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2r)-12r^3+6r^2+6r\right\}$

$$=2\pi r\left(-\sqrt{1-r^2}-2r^2++r+1\right)$$

ここで，$y=\sqrt{1-r^2}$ と $y=-2r^2+r+1$ のグラフをかくと, 右図のようになり, 交点の r 座標は,



$$\sqrt{1-r^2}=-2r^2+r+1,\ 1-r^2=(-2r^2+r+1)^2$$

$$4r^4-4r^3-2r^2+2r=0,\ r(r-1)(2r^2-1)=0$$

図から，$r=0,\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

すると，$0<r<1$ のとき，$V(r)$ の増減は右表のようになり，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる。

r	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$	0	＋	0	－	0
$V(r)$		↗		↘	

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2}-2\right\}=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$$

［解 説］

計算量は多いですが, 方針に迷いは生じません。今年は, 東大で 2 球の和集合, 東工大では 2 球の共通部分の体積が題材となりました。