1

解答解説のページへ

e を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　$n \geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2)　$n \geqq 1$ に対し，$a_n > a_{n+1} > 0$ となることを示せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}(e-2)$$

$\boxed{2}$　解答解説のページへ

1から6までの目が$\dfrac{1}{6}$の確率で出るサイコロを振り，1回目に出る目をα，2回目に出る目をβとする。2次式$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$を$f(x)$とおき，$f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$とする。

(1)　sおよびtの期待値を求めよ。

(2)　a, b, cおよびdの期待値を求めよ。

3

解答解説のページへ

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。

4

解答解説のページへ

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s = x + y$，$t = xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2)　負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy + m(x + y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　$n \geqq 2$ のとき，条件より，

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx = \Big[x(\log x)^n \Big]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} x^{-1} dx$$

$$= e - n\int_1^e (\log x)^{n-1} dx = e - na_{n-1} \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 3$ のとき，①より，$a_{n-1} = e-(n-1)a_{n-2} \cdots\cdots\cdots ②$

①－②から，$a_n - a_{n-1} = -na_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ となり，

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) \quad (n \geqq 3)$$

(2)　$1 \leqq x \leqq e$ において，$(\log x)^{n+1} \geqq 0$（等号は $x=1$ のときのみ成立）より，

$$a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$$

また，(1)より，$a_{n+2} = (n+1)(a_n - a_{n+1}) > 0$ から，$a_n > a_{n+1}$

よって，$a_n > a_{n+1} > 0$

(3)　(2)より，$a_{2n-1} > a_{2n} > 0 \cdots\cdots\cdots ③$

また(1)より，$a_{2n} = (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1}) \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$a_{2n} < (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n})$ となり，

$$2na_{2n} < (2n-1)a_{2n-2}, \quad a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} a_{2n-2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$a_n > 0$ より，⑤から，$a_{2n} < \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdots\cdots \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} a_2$

ここで，$a_2 = \displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2\int_1^e \log x\, dx = e - 2\Big[x\log x - x \Big]_1^e$

$$= e - 2\{e-(e-1)\} = e-2$$

以上より，$a_{2n} < \dfrac{3 \cdot 5 \cdots\cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdot (2n)}(e-2)$

［解 説］

(3)の結論の不等式から，どのような漸化式を導けばよいのか推測できます。そのための誘導が，(1)と(2)です。

2

問題のページへ

(1)　$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ より,

$$s=-(\alpha+\beta),\ t=\alpha\beta$$

α，β の期待値をそれぞれ $E(\alpha)$，$E(\beta)$ とすると,

$$E(\alpha)=E(\beta)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

すると, $E(s)=E(-\alpha-\beta)=-E(\alpha)-E(\beta)=-7$

また, α と β は独立なので,

$$E(t)=E(\alpha\beta)=E(\alpha)E(\beta)=\frac{49}{4}$$

(2)　$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ より,

$$a=-2\alpha-2\beta,\ b=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2,\ c=-2\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta,\ d=\alpha^2\beta^2$$

すると, $E(a)=E(-2\alpha-2\beta)=-2E(\alpha)-2E(\beta)=-14$

α^2，β^2 の期待値をそれぞれ $E(\alpha^2)$，$E(\beta^2)$ とすると,

$$E(\alpha^2)=E(\beta^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

すると, $E(b)=E(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)=E(\alpha^2)+4E(\alpha\beta)+E(\beta^2)=\frac{238}{3}$

また, α^2 と β，α と β^2 は独立なので,

$$E(c)=E(-2\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta)=-2E(\alpha)E(\beta^2)-2E(\alpha^2)E(\beta)=-\frac{637}{3}$$

さらに, α^2 と β^2 は独立なので,

$$E(d)=E(\alpha^2\beta^2)=E(\alpha^2)E(\beta^2)=\frac{8281}{36}$$

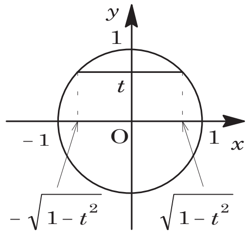
［解 説］

旧課程では数 B, 現行課程では数 C の「確率分布」のセクションにある公式を用いました。書き方がやや雑ですが。

3

問題のページへ

円 C の対称性から，条件を満たす円盤 D が通過する領域は，xz 平面に関して対称である。

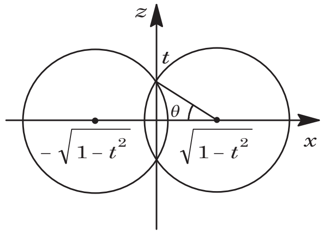


そこで，$y \geqq 0$ の部分に対し，この部分を平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った切り口を考える。

この切り口は，中心$(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円と，中心$(-\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円の和集合となっている。

右図のように角 θ をとると，

$$\cos\theta = \sqrt{1-t^2}\ ,\ \ \sin\theta = t \cdots\cdots\cdots (*)$$



そこで，切り口の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = 4\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-\theta)+\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\ \right\}$$
$$= 2\pi - 2\theta + 2t\sqrt{1-t^2}$$

求める D の通過領域の体積 V は，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = 4\int_0^1 (\pi-\theta+t\sqrt{1-t^2}\,)\,dt = 4\pi - 4\int_0^1 \theta\,dt + 4\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$(*)$より，$dt = \cos\theta\,d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \theta\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta\,d\theta = \Big[\,\theta\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}-1$$

また，$\sqrt{1-t^2} = u$ とおくと，$1-t^2 = u^2$，$-2tdt = 2udu$ から，

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_1^0 u(-u)\,du = \int_0^1 u^2du = \frac{1}{3}$$

以上より，

$$V = 4\pi - 4\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + 4\cdot\frac{1}{3} = 2\pi + \frac{16}{3}$$

［解 説］

初めは，z 軸に垂直な切り口を考えましたが，複雑そうなので，考えを改め，y 軸に垂直な切り口に変更しました。断面積を求めるときに，中心角を設定する必要がありますが，今年は，東大でもこの技法を用いる問題が出ています。

4

問題のページへ

(1)　$s=x+y$，$t=xy$ より，実数 x, y は, 2 次方程式 $u^2-su+t=0$ の解なので,

$$D=s^2-4t\geqq 0,\ t\leqq\frac{1}{4}s^2\cdots\cdots\cdots①$$

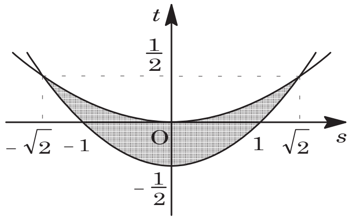
条件より，$x^2+y^2\leqq 1$ から，$(x+y)^2-2xy\leqq 1$ となり,

$$s^2-2t\leqq 1,\ t\geqq\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②の境界線の交点は，$\frac{1}{4}s^2=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$ より,

$$s=\pm\sqrt{2},\ t=\frac{1}{2}$$

よって，点 $(s,\ t)$ の動く範囲は右図の網点部となる。なお, 境界は領域に含む。

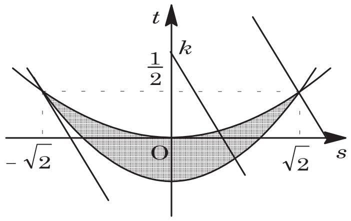


(2)　$xy+m(x+y)=k$ とおくと，$t+ms=k$ から,

$$t=-ms+k\cdots\cdots\cdots③$$

さて，st 平面上で③は傾き $-m$ の直線群を表し，(1)の領域を共有点の存在する k の範囲を求める。

まず，$-m\leqq 0$ なので, k は $(s,\ t)=\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ において最大となり，最大値は $\frac{1}{2}+\sqrt{2}m$ である。



また，②の境界線 $t=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$ と直線③が接するとき,

$$-ms+k=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2},\ s^2+2ms-2k-1=0\cdots\cdots\cdots④$$

④より，接点の s 座標は $s=-m$ となる。

(i)　$-m\leqq-\sqrt{2}$ $(m\geqq\sqrt{2})$ のとき

図より，k は $(s,\ t)=\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\frac{1}{2}-\sqrt{2}m$ である。

(ii)　$-m\geqq-\sqrt{2}$ $(0\leqq m\leqq\sqrt{2})$ のとき

図より，k は接点 $(s,\ t)=\left(-m,\ \frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}-m^2$ すなわち $-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$ となる。

［解 説］

経験済みというのが当然なぐらいの頻出題です。(2)の場合分けも煩雑なものではありません。