1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3)　a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at|\,dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2)　m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

(a)　$y>x>0$　　　(b)　すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t \geqq m$

を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3)　(2)の領域 D の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

4

解答解説のページへ

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

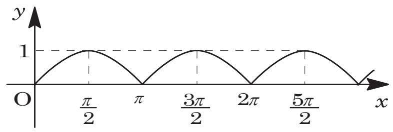
(2)　四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3)　辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=|\sin x|$ とおくと,



$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|$$
$$=|-\sin x|=f(x)$$

また, k を整数として,

$$f(k\pi-x)=|\sin(k\pi-x)|=|\sin x|=f(x)$$

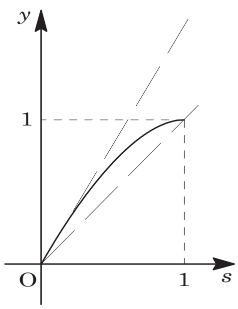
これより，$y=f(x)$ のグラフは周期 π であり，しかも直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ に関して対称であるので,

$$I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-n\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=n$$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ において，$g(s)=\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{s\pi}{2}}=\sin\frac{s\pi}{2}$ とおく。

$$g'(s)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}\geqq 0,\ g''(s)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{s\pi}{2}\leqq 0$$

これより，$y=g(s)$ のグラフは，右図のように，上に凸で単調に増加し，$g'(0)=\dfrac{\pi}{2}$ から,



$$s\leqq g(s)\leqq\frac{\pi}{2}s,\ 0\leqq g(s)-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s$$

よって，$0\leqq\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$

(3)　まず，$at=x$ とおくと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx$$

ここで, (1)の結果を用いると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$x-\dfrac{[a]\pi}{2}=u$ とおくと，$[a]$ が奇数より,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\left|\sin\left(u+\frac{[a]\pi}{2}\right)\right|du=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}|\cos u|du$$

$0\leqq\dfrac{a-[a]}{2}\pi<\dfrac{\pi}{2}$ から,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos u\,du\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$0\leqq a-[a]<1$ なので, (2)より,

$$a-[\,a\,]\leqq\int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[\,a\,])+(a-[\,a\,])$$

$$1-\frac{[\,a\,]}{a}\leqq\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より,

$$\frac{[\,a\,]}{a}+1-\frac{[\,a\,]}{a}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|\,dt\leqq\frac{[\,a\,]}{a}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$

以上より, $0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|\,dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$

［解　説］

グラフを見ながら解いています。(1)と(2)は直接的ですが, (3)もグラフを対応させて方針を立てました。つまり, $y=f(x)$ のグラフの特徴から, $[\,a\,]$が奇数という条件の利用方法を考えたわけです。

2

問題のページへ

(1)　$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ より，

$$g'(t)=\frac{a}{b}t^{a-1}-\frac{1}{t}=\frac{a}{bt}\left(t^a-\frac{b}{a}\right)$$

関数 $g(t)$ の増減は右表のようになり，極小値は，

t	0	$\cdots$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\log\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\left(1-\log\frac{b}{a}\right)$$

(2)　条件(a)より $y>x>0$……①なので，(1)から，$\dfrac{1}{y}t^x-\log t\geqq\dfrac{1}{x}\left(1-\log\dfrac{y}{x}\right)$

すると，条件(b)が成立する条件は，$\dfrac{1}{x}\left(1-\log\dfrac{y}{x}\right)\geqq m$ となり，

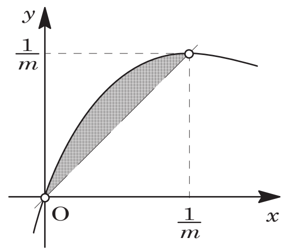
$$\log\frac{y}{x}\leqq 1-mx\,,\ \ y\leqq xe^{1-mx}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(x)=xe^{1-mx}$ とおくと，

$$f'(x)=e^{1-mx}-mxe^{1-mx}=(1-mx)e^{1-mx}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{m}$	$\searrow$	0

よって，①②を満たす領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし破線の境界は含まない。



(3)　領域 D の面積 S は，$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{m}}xe^{1-mx}dx-\frac{1}{2m^2}$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{m}}xe^{1-mx}dx=\left[-\frac{1}{m}xe^{1-mx}\right]_0^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{m}}e^{1-mx}dx$

$$=-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\left[-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right]_0^{\frac{1}{m}}$$

$$=-\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^2}(1-e)=-\frac{2}{m^2}+\frac{e}{m^2}$$

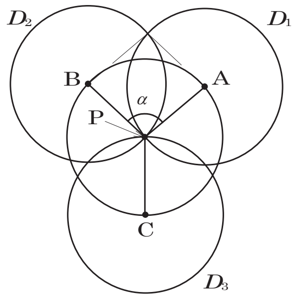
よって，$S=-\dfrac{2}{m^2}+\dfrac{e}{m^2}-\dfrac{1}{2m^2}=\dfrac{1}{m^2}\left(e-\dfrac{5}{2}\right)$

［解 説］

式の形から明らかなように，(1)が(2)の誘導となっています。(1)で求めた最小値を利用して(2)を解きなさいというメッセージを読み取ることができます。

3

問題のページへ



右図のように 3 個の半径 1 の円板を D_1，D_2，D_3 とし，その中心をそれぞれ A, B, C とおく。

さらに，$\angle\mathrm{APB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BPC}=\beta$，$\angle\mathrm{CAP}=\gamma$ とおくと，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\gamma\leqq\pi$ において，

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi\cdots\cdots\cdots①$$

すると，D_1 と D_2 の共通部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot1^2(\pi-\alpha)\times2-1^2\sin\alpha=\pi-\alpha-\sin\alpha$$

D_2 と D_3，D_3 と D_1 の共通部分の面積も同様に考えることができ, 3 個の円板 D_1，D_2，D_3 の和集合の面積 S は，①を利用して,

$$S=\pi\cdot1^2\times3-\{(\pi-\alpha-\sin\alpha)+(\pi-\beta-\sin\beta)+(\pi-\gamma-\sin\gamma)\}$$
$$=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=2\pi+\sin\alpha+2\cos\frac{\beta+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\pi+\sin\alpha-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

さて，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で固定すると，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$ から $-\frac{\alpha}{2}+\pi\leqq\frac{\alpha}{2}+\beta\leqq\frac{\alpha}{2}+\pi$ となる。よって，$\frac{\alpha}{2}+\beta=\pi$ ……②のとき, S は最大となり,

$$S=2\pi+\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}$$

そこで，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で変化させると,

$$S'=\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-1$$
$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
S'		+	0	−	
S		↗		↘	

以上より，$\alpha=\frac{2}{3}\pi$ のとき S は最大値をとり，その値は,

$$S=2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

なお，このとき①②より，$\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$ である。

［解 説］

東工大らしい問題です。結論は容易に推測できるものの, それを示すのは簡単ではありません。なお，条件(b)は，α，β，γ の範囲に反映しています。

4

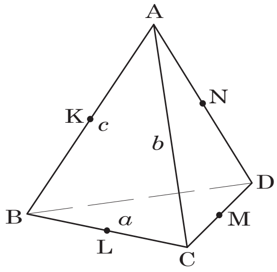
問題のページへ

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=4\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right)$

$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$=(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$



(2) △ABC について，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とする。

(i) 3 辺の長さが異なるとき（$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$）

△ABC≡△ABD より，$\mathrm{BD}=a$ または $\mathrm{AD}=a$ である。

ここで，$\mathrm{BD}=a$ のときは，△BCD について BC = BD となり不適である。

よって，$\mathrm{AD}=a$ となり，このとき $\mathrm{BD}=b$ となる。

同様に考えると，△ABC≡△ACD より，$\mathrm{CD}=c$ かつ $\mathrm{AD}=a$ となる。

以上より，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

(ii) 2 辺の長さのみ等しいとき（$a=b\neq c$ または $a=c\neq b$ または $b=c\neq a$）

まず，$a=b\neq c$ のとき，△ABC≡△ABD より，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=a$ である。

また，△ABC≡△ACD より $\mathrm{CD}=c$ となり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。なお，対称性から，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ のときも同様となる。

(iii) 3 辺の長さが等しいとき（$a=b=c$）

四面体 ABCD は正四面体であり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

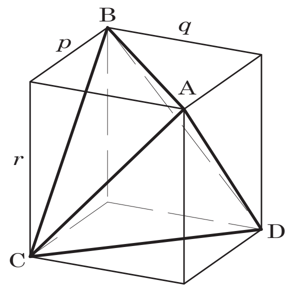
(i)〜(iii)より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$

(3) (2)より，四面体 ABCD は，右図のように直方体に埋め込まれる。この直方体の辺の長さを p, q, r とおくと，

$$p^2+q^2=3,\quad p^2+r^2=5,\quad q^2+r^2=6$$

これより，$p^2+q^2+r^2=7$ となり，

$$p=1,\quad q=\sqrt{2},\quad r=2$$



そこで，四面体 ABCD の体積を V_0 とおくと，

$$V_0=pqr-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pqr\times 4=\frac{1}{3}pqr=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

四面体 PKLN の体積は, P が辺 AC の中点より四面体 PKAN の体積に等しい。

よって，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3V_0=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ である。

［解 説］

(3)は, (1), (2)を無視して，等面四面体が直方体に埋め込まれるということを利用しています。なお, 2001 年東北大で, 1993 年東大で類する問題が出ています。