

1

解答解説のページへ

p を素数, n を 0 以上の整数とする。

- (1) m は整数で $0 \leq m \leq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。
- (2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ。

2

解答解説のページへ

正数 a に対して、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を、 A を中心に -30° 回転した直線を l とする。 l と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a, 0)$ を C 、原点を O とする。

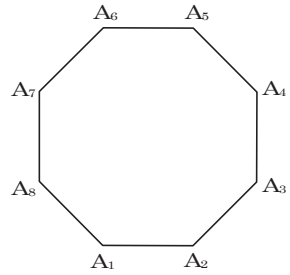
- (1) l の式を求めよ。
- (2) 線分 OC , CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ 、線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。

3

1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の周上を 3 点 P , Q , R が動くとする。

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。
- (2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し, $\angle PQR = 90^\circ$ となるとき $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。

解答解説のページへ



4

解答解説のページへ

- (1) 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ と正数 a_n に対して, $f_n(x) = a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。
- (2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。 $y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0 , $n \geq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $0 \leq m \leq n$ のとき, 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れるのは,

$$p^m, 2p^m, 3p^m, \dots, p^{n+1-m}p^m$$

これより, p^{n+1-m} 個の整数があり, また p^{m+1} で割り切れるのは,

$$p^{m+1}, 2p^{m+1}, 3p^{m+1}, \dots, p^{n-m}p^{m+1}$$

これより, p^{n-m} 個の整数がある。

したがって, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れない整数の個数は,

$$p^{n+1-m} - p^{n-m} = (p-1)p^{n-m}$$

(2) (i) $x = p^{n+1}$ のとき

任意の y で, 積 xy が p^{n+1} で割り切れるので, (x, y) の個数は p^{n+1} である。

(ii) $x = p^m$ ($0 \leq m \leq n$) のとき

x が p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れず, しかも積 xy が p^{n+1} で割り切れる条件は, y が p^{n+1-m} で割り切れることである。すなわち y は,

$$p^{n+1-m}, 2p^{n+1-m}, 3p^{n+1-m}, \dots, p^m p^{n+1-m}$$

すると, x の個数は(1)より $(p-1)p^{n-m}$, y の個数は p^m より, (x, y) の個数は

$$(p-1)p^{n-m} \times p^m = (p-1)p^n$$

(i)(ii)より, 積 xy が p^{n+1} で割り切れる (x, y) の個数は,

$$p^{n+1} + \sum_{m=0}^n (p-1)p^n = p^{n+1} + (n+1)(p-1)p^n = (n+2)p^{n+1} - (n+1)p^n$$

[解説]

たとえば $p=2$, $m=3$, $n=10$ と, 具体的に数値を入れて, まず考えています。上の解は, それを一般的に記述したにすぎません。

2

問題のページへ

- (1) $y = x^2$ より, $y' = 2x$ なので, $A(a, a^2)$ における接線の傾きは $2a$ である。

さて, この接線および接線を A を中心として -30° だけ回転した直線 l と, x 軸の正の部分とのなす角を, それぞれ α, β とすると, $\tan \alpha = 2a$ から, l の傾きは,

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan(\alpha - 30^\circ) = \frac{\tan \alpha - \tan 30^\circ}{1 + \tan \alpha \cdot \tan 30^\circ} \\ &= \frac{2a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

よって, l の方程式は,

$$y - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}(x - a), \quad y = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}x + \frac{2a^3 - \sqrt{3}a^2 + a}{2a + \sqrt{3}}$$

- (2) 放物線 $y = x^2$ と l との交点は,

$$x^2 - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}(x - a), \quad (x - a)\left(x - \frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}\right) = 0$$

よって, $x = a, \frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}$ となり, そこで $\frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}} = b$ とおく。

さて, 線分 OC, CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は,

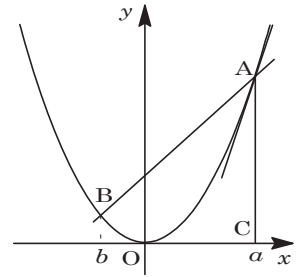
$$S(a) = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

また, 線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 $T(a)$ は,

$$\begin{aligned} T(a) &= \int_b^a -(x - a)(x - b) dx = \frac{1}{6}(a - b)^3 = \frac{1}{6}\left(a - \frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{4a^2 + 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3 \end{aligned}$$

以上より, $\frac{T(a)}{S(a)} = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{4a^2 + 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4a + a^{-1}}{2a + \sqrt{3}}\right)^3$ となり,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)} = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$



[解説]

微積分の標準的な問題です。計算の質や量も適当です。

3

問題のページへ

(1) まず、点 P を辺 A_1A_2 上に固定する。さらに、正八角形の中心を O とし、点 P, Q の O に関する対称点をそれぞれ P' , Q' とおく。また、 $PS \parallel A_6A_7$ となるように点 S を辺 A_3A_4 上にとる。

以下、対称性より、点 Q が PA_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5P' 上にあるときを考える。

(i) 点 Q が PA_2 , A_2A_3 , A_3S 上にあるとき

$P'Q' \parallel PQ$ より、点 R が点 A_6 にあるとき、 $\triangle PQR$ の面積はつねに最大になり、

$$\triangle PQR \leq \triangle PQA_6$$

このとき点 Q を動かすと、 PA_6 からの距離が最大となるのは、Q が S に一致するときである。すなわち、

$$\triangle PQA_6 \leq \triangle PSA_6$$

(ii) 点 Q が SA_4 , A_4A_5 , A_5P' 上にあるとき

$P'Q' \parallel PQ$ より、点 R が点 A_7 にあるとき、 $\triangle PQR$ の面積はつねに最大になり、

$$\triangle PQR \leq \triangle PQA_7$$

このとき点 Q を動かすと、 PA_7 からの距離が最大となるのは、Q が A_4 に一致するときである。すなわち、

$$\triangle PQA_7 \leq \triangle PA_4A_7$$

(i)(ii) より、 $\triangle PSA_6$ と $\triangle PA_4A_7$ の面積を比べると、

$$\triangle PA_4A_7 \geq \triangle PA_4A_6 \geq \triangle PSA_6$$

以上より、 $\triangle PQR$ の面積は、 $\triangle PQR = \triangle PA_4A_7$ のとき最大となる。

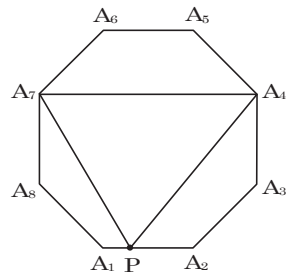
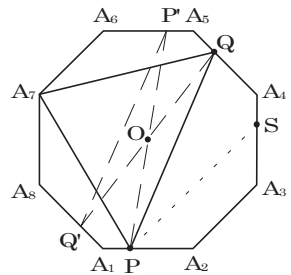
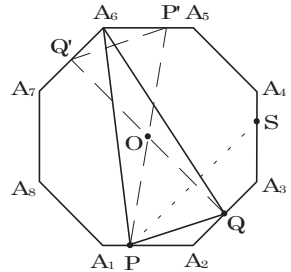
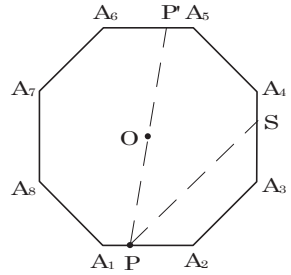
$$\text{さて、} A_4A_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

また、P から A_4A_7 までの距離は、 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、

$$\triangle PA_4A_7 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4}$$

(2) 点 Q が頂点 A_1 に一致するとき、正八角形の外接円の直径の両端として、 P'' , Q'' をとるとき、 $\angle P''QR'' = 90^\circ$ となる。

そこで、 $\triangle P''QR''$ の面積が最大となるのは、 $A_1O \perp P''R''$ のときであり、直径 $P''R''$ が A_3A_7 に一致する。



よって、 $\triangle PQR$ の面積は、 $\triangle PQR = \triangle A_1A_3A_7$ のとき最大となる。

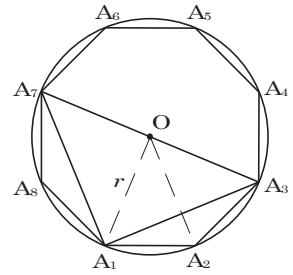
さて、 $\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ から、外接

円の半径 r は、

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{\sin 22.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

以上より、 $\triangle PQR$ の面積の最大値は、

$$\triangle A_1A_3A_7 = \frac{1}{2}r^2 \times 2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$



【解説】

平面図形の最大・最小問題ですが、制限時間のある入試ではキツイ内容です。特に、どこまで記述すればよいのか迷ってしまいます。(1)では丁寧に書きましたが、(2)ではそのエネルギーが枯渇しています。

4

問題のページへ

(1) $f_n(x) = a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して、
 $f_n'(x) = a_n\{(n+1-x) - (x-n)\} = a_n(-2x+2n+1)$

また、 $y = e^{-x}$ に対して、 $y' = -e^{-x}$

さて、2 曲線 $y = a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y = e^{-x}$ が $x = t_n$ で接するとすると、

$$a_n(-2t_n+2n+1) = -e^{-t_n} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n) = e^{-t_n} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$a_n > 0$ より、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から、 $2t_n - 2n - 1 = (t_n - n)(n + 1 - t_n)$

$$t_n^2 - (2n-1)t_n + n^2 - n - 1 = 0$$

$$\text{よって、} t_n = \frac{2n-1 \pm \sqrt{(2n-1)^2 - 4(n^2 - n - 1)}}{2} = \frac{2n-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$n < t_n < n+1$ から、 $t_n = \frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

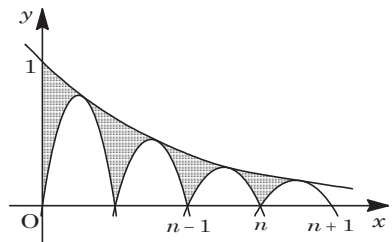
$$a_n = \frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1} e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}} = (2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) まず、 $y = f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は、

$$\int_n^{n+1} a_n(x-n)(n+1-x) dx = \frac{a_n}{6} (n+1-n)^3 = \frac{a_n}{6}$$

ここで、 $0 \leq x \leq n$ において、曲線 $y = e^{-x}$ と $y = f_0(x)$ 、 $y = f_1(x)$ 、 \dots 、 $y = f_{n-1}(x)$ によつてはさまれた部分の面積を T_n とおくと、

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^n e^{-x} dx - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= -[e^{-x}]_0^n - \frac{2+\sqrt{5}}{6} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2k-1+\sqrt{5}}{2}} \\ &= -e^{-n} + 1 - \frac{2+\sqrt{5}}{6} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \end{aligned}$$



さて、条件より、 $T_n < S_0 + S_1 + \dots + S_n < T_{n+1}$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n+1} = 1 - \frac{2+\sqrt{5}}{6} e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{1-e^{-1}} = 1 - \frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = 1 - \frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

[解説]

(2)では、最初、 S_n を定積分で立式しましたが、とうてい計算を実行する気になれません。そこで、第2問と同様に、 $\frac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。