1

解答解説のページへ

正の整数 $a,\ b$ に対し，$x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1)　接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また, b を a の関数として表せ。

(2)　$0<h<s$ を満たす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$，$y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\lim\limits_{h\to 0} A(h)$ を a で表せ。

2

解答解説のページへ

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a，b を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

3

解答解説のページへ

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。

4

解答解説のページへ

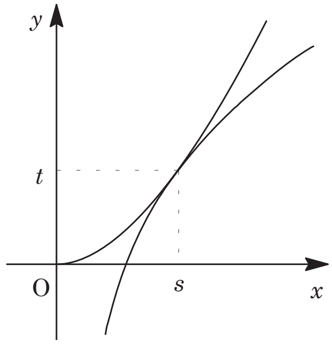
平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2)　2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　$y=x^a$ ……①に対し，$y'=ax^{a-1}$

また，$y=\log bx$ ……②に対し，$y'=\dfrac{1}{x}$

①と②のグラフが点$(s,\ t)$で接することより，

$$s^a=\log bs \cdots\cdots③,\quad as^{a-1}=\frac{1}{s} \cdots\cdots④$$

④から，$s^a=\dfrac{1}{a}$ となり $s=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}}=a^{-\frac{1}{a}}$

①から，$t=s^a=\dfrac{1}{a}$

③④から，$\dfrac{1}{a}=\log\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ となり，$b=a^{\frac{1}{a}}e^{\frac{1}{a}}=(ae)^{\frac{1}{a}}$

(2)　2曲線$y=x^a$，$y=\log bx$ と直線$x=h$ $(0<h<s)$で囲まれる領域の面積$A(h)$は，

$$A(h)=\int_h^s (x^a-\log bx)\,dx=\left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}-x\log b-x\log x+x\right]_h^s$$

$$=\frac{1}{a+1}(s^{a+1}-h^{a+1})-(s-h)\log b-(s\log s-h\log h)+s-h$$

ここで, $h\to 0$ のとき，$h\log h\to 0$ なので, (1)の結果を用いると,

$$\lim_{h\to 0}A(h)=\frac{1}{a+1}s^{a+1}-s\log b-s\log s+s=s\left(\frac{1}{a+1}s^a-\log b-\log s+1\right)$$

$$=a^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\log ae+\frac{1}{a}\log a+1\right)=a^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1\right)$$

$$=a^{-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}+1\right)=\frac{a}{a+1}a^{-\frac{1}{a}}$$

［解 説］

微積分の基本問題で，計算量も少なめです。なお，本問では，$\lim_{h\to 0}h\log h=0$ の利用に，証明は不要でしょう。

2

問題のページへ

k を整数とするとき，$f(x)$ の定義より，$f(x+k)=f(x)+k$ となり，

$$f(ax-7)=f(ax)-7,\quad f(bx+3)=f(bx)+3$$

すると，$\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}=\dfrac{1}{f(ax)-7}-\dfrac{1}{f(bx)+3}$

$$=\frac{f(bx)-f(ax)+10}{(f(ax)-7)(f(bx)+3)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

同様に，$f(x)$ の定義より，$x\leqq f(x)<x+1$ となり，

$$ax\leqq f(ax)<ax+1,\quad bx\leqq f(bx)<bx+1$$

すると，$x>0$ において，

$$a\leqq\frac{f(ax)}{x}<a+\frac{1}{x},\quad b\leqq\frac{f(bx)}{x}<b+\frac{1}{x}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{x}=b$

ここで，$g(x)=x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$とおくと，

(i)　$a\neq b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-1}\cdot\dfrac{\dfrac{f(bx)}{x}-\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{10}{x}}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(bx)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-1>0$ のとき発散，$c-1\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は $c=1$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{b-a}{ab}$ である。

(ii)　$a=b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-2}\cdot\dfrac{10}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-2>0$ のとき発散，$c-2\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は $c=2$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{10}{a^2}$ である。

[解　説]

題意を言い換えた不等式 $x\leqq f(x)<x+1$ のみで評価すると，$a=b$ のときがアバウトになりすぎます。そこで，収束する形を作るという基本に戻ったのが上の解です。もっとも，さらに基本なのは「x が大きくなると $f(x)$ は x と同じようなもの」という感覚ですが。

3

問題のページへ

(1)　題意のサイコロを振ったとき, k の目が出る確率を p_k とおくと,

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

サイコロを 2 回振ったとき, 同じ目の出る確率 P は, $(*)$より,

$$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$$
$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}(p_1+p_2+\cdots+p_6)-\frac{1}{6}$$
$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}$$

よって, $P\geqq\frac{1}{6}$ となる。

また, 等号が成立するのは, $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}$ のときである。

(2)　サイコロを 2 回振ったとき, 1 回目に奇数, 2 回目に偶数の出る確率 Q は,

$$Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$$

相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $(*)$より,

$$(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)\leqq\left(\frac{p_1+p_3+p_5+p_2+p_4+p_6}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

よって, $Q\leqq\frac{1}{4}$ となる。

また, $3P+2Q-1=3(p_1{}^2+p_2{}^2+\cdots+p_6{}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1$

ここで, $(*)$から, $1=(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$ に注目すると,

$$3(p_1{}^2+p_2{}^2+\cdots+p_6{}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1$$
$$=2(p_1{}^2+p_2{}^2+\cdots+p_6{}^2)-2(p_1p_3+p_3p_5+p_5p_1+p_2p_4+p_4p_6+p_6p_2)$$
$$=(p_1-p_3)^2+(p_3-p_5)^2+(p_5-p_1)^2+(p_2-p_4)^2+(p_4-p_6)^2+(p_6-p_2)^2$$

よって, $3P+2Q-1\geqq0$ より, $Q\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ となる。

以上より, $\frac{1}{4}\geqq Q\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ が成立する。

［解 説］

(1)は, 有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用するという手もありますが, ここでは結論を予測して平方完成をしました。(2)の右側の不等式の証明は難ですが, 式を変形しているうちに気付いた方法で記しています。

4

問題のページへ

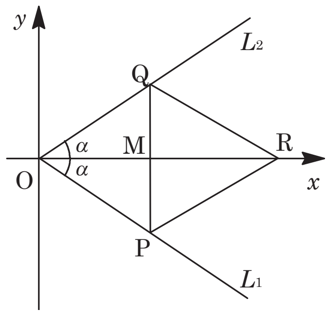
(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて, PQ の中点 M は，$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり,

$$\mathrm{MR}=\mathrm{MP}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\tan\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2)　半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ $(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とすることができるので, $p>0$, $q>0$ として,

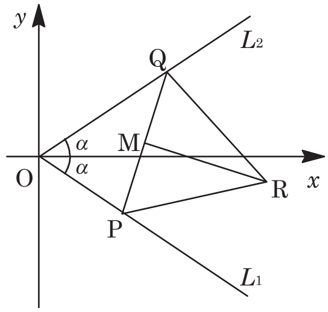
$$\mathrm{P}(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ \mathrm{Q}(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，$\mathrm{PQ}=1$ より,

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて, PQ の中点 M は,

$$\mathrm{M}\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ より，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと,

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q) \cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q) \cdots\cdots ③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

よって，点 R の軌跡は楕円の一部である。

［解 説］

図形と方程式の重要題の１つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。