

1

解答解説のページへ

点 P から放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき、2 つの接点を A, B とし、線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 a に対し、次の 1 次変換

$$f(x, y) = (ax + (a-2)y, (a-2)x + ay)$$

を考える。以下の 2 条件を満たす直線 L が存在するような a を求めよ。

- (i) L は点 $(0, 1)$ を通る。
- (ii) 点 Q が L 上にあれば、その f による像 $f(Q)$ も L 上にある。

3

解答解説のページへ

N を正の整数とする。 $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で、方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

4

解答解説のページへ

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を l とする。

- (1) l 上の点 $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り l と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。
- (2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。 l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

1

問題のページへ

$y = \frac{1}{2}x^2$ より $y' = x$ となるので、接点を $A(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2)$,
 $B(\beta, \frac{1}{2}\beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とおくと、A における接線は、

$$y - \frac{1}{2}\alpha^2 = \alpha(x - \alpha), \quad y = \alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 \dots\dots\dots ①$$

同様に、B における接線は、

$$y = \beta x - \frac{1}{2}\beta^2 \dots\dots\dots ②$$

$$①②より, (\alpha - \beta)x - \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$\alpha < \beta \text{ より, } x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

さて、2本の接線と放物線で囲まれる図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\frac{1}{2}x^2 - \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left(\frac{1}{2}x^2 - \beta x + \frac{1}{2}\beta^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{6} \left[(x - \beta)^3 \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{-\alpha + \beta}{2} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^3 = \frac{1}{24} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

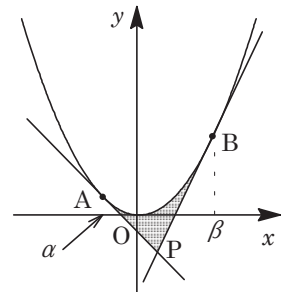
ここで、2本の接線が直交することより、 $\alpha\beta = -1$ となり、 $\alpha = -\frac{1}{\beta}$ から、

$$S = \frac{1}{24} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^3$$

$\alpha < 0 < \beta$ から、相加平均と相乗平均の関係を用いて、

$$S = \frac{1}{24} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^3 \geq \frac{1}{24} \cdot 2^3 = \frac{1}{3}$$

等号は $\beta = \frac{1}{\beta}$ すなわち $\beta = 1$ のとき成立することより、 S の最小値は $\frac{1}{3}$ である。



[解説]

センターレベルの微積分の頻出基本問題です。

2

問題のページへ

$(x', y') = f(x, y)$ とおくと、条件より、

$$x' = ax + (a-2)y \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y' = (a-2)x + ay \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、点 $(0, 1)$ を通る直線 L は、 $y = mx + 1$ または $x = 0$ と表すことができる。

(i) $L : y = mx + 1$ のとき

t を実数として、 L 上の点を、 $(t, mt + 1)$ とおくと、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より、

$$x' = at + (a-2)(mt+1) = (a+am-2m)t + a-2$$

$$y' = (a-2)t + a(mt+1) = (a-2+am)t + a$$

条件より、 $y' = mx' + 1$ なので、

$$(a-2+am)t + a = m\{(a+am-2m)t + a-2\} + 1$$

任意の t に対して成立することより、

$$a-2+am = m(a+am-2m) \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad a = m(a-2)+1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\text{より}, \quad a-2 = am^2 - 2m^2, \quad (a-2)(m^2-1) = 0$$

$a=2$ のとき、 $\textcircled{4}$ は $a=1$ となり不適である。

$m=1$ のとき、 $\textcircled{4}$ は $a=a-2+1$ となり成立しない。

$m=-1$ のとき、 $\textcircled{4}$ は $a=-a+2+1$ となり、 $a = \frac{3}{2}$ である。

(ii) $L : x = 0$ のとき

s を実数として、 L 上の点を、 $(0, s)$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より、

$$x' = (a-2)s$$

条件より、 $x' = 0$ なので、 $(a-2)s = 0$

任意の s に対して成立することより、 $a = 2$ である。

(i)(ii)より、 $a = \frac{3}{2}, 2$ である。

[解説]

1次変換における不変直線を題材にした頻出問題です。

3

問題のページへ

$1 \leq m \leq 2N \cdots \cdots \textcircled{1}$, $1 \leq n \leq 2N \cdots \cdots \textcircled{2}$ において, 方程式 $x^2 - nx + m = 0$ の実数解を $x = \alpha, \beta$ とおく。 N 以上の解を少なくとも 1 つもつことより,

(a) $N < \alpha \leq \beta$ のとき $\frac{n}{2} > N$ が必要となるが, $\textcircled{2}$ に反する。

(b) $\alpha < N < \beta$ のとき 条件は, $N^2 - nN + m < 0$ より, $m < Nn - N^2$

(c) $N = \alpha \leq \beta$ または $\alpha \leq \beta = N$ のとき

条件は, $N^2 - nN + m = 0$, $m = Nn - N^2$

(a)(b)(c)より, $m \leq Nn - N^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

さて, $\textcircled{3}$ の境界線 $m = Nn - N^2$ において, $m = 2N$ のとき,

$$2N = Nn - N^2, \quad n = N + 2$$

(i) $N + 2 \leq 2N$ ($N \geq 2$) のとき

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ を満たす (n, m) は, 右図の網点部にある格子点に対応する。ただし, n 軸以外の境界は領域に含まれる。

すると, 領域内の格子点の個数 S は,

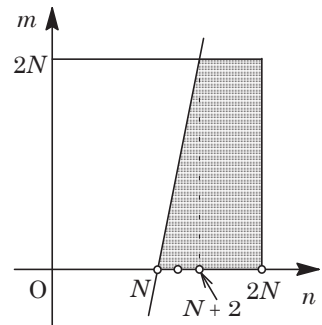
$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=N}^{N+2} (Nk - N^2) + 2N(2N - N - 2) \\ &= N \cdot \frac{N + N + 2}{2} \cdot 3 - 3N^2 + 2N(N - 2) \\ &= 2N^2 - N \end{aligned}$$

(ii) $N + 2 > 2N$ ($N = 1$) のとき

$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ より, $1 \leq m \leq 2$, $1 \leq n \leq 2$, $m \leq n - 1$ となり, この不等式を満たす格子点 (n, m) は, $(n, m) = (2, 1)$ のみである。

ここで, $N = 1$ のとき $2N^2 - N = 1$ より, 格子点の個数は $S = 2N^2 - N$ と表せる。

(i)(ii)より, 求める (m, n) は, $2N^2 - N$ 組存在する。



[解説]

N 以上の実数解が 1 個, 2 個と場合分けを覚悟して問題に臨みましたが, その必要はありませんでした。

4

問題のページへ

(1) 原点と点(1, 1, 1)を通る直線 l の方程式は,

$$x = y = z \cdots \cdots \textcircled{1}$$

これより, 点 $P(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り l と垂直な平面 α は,

$$(x - \frac{t}{3}) + (y - \frac{t}{3}) + (z - \frac{t}{3}) = 0, \quad x + y + z = t$$

この平面と xy 平面との交線は, $z = 0$ を代入して,

$$x + y = t, \quad z = 0$$

(2) xy 平面上で, $x + y = t \cdots \cdots \textcircled{2}$ と $y = x(1-x) \cdots \cdots \textcircled{3}$ を連立すると,

$$t - x = x - x^2, \quad x^2 - 2x + t = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

②と③が共有点をもつ条件は,

$$D/4 = 1 - t \geq 0, \quad t \leq 1$$

よって, 直線②と領域 $D: 0 \leq y \leq x(1-x)$ が共有点をもつ条件は, $0 \leq t \leq 1$ である。

このとき, 右図のように共有点を Q, R とおくと, ④から, $Q(t, 0, 0), R(1 - \sqrt{1-t}, t - 1 + \sqrt{1-t}, 0)$ となる。

また, 直線 l を xy 平面へ正射影すると, 直線 $x = y, z = 0$ となり, この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより, 平面 α 上で点 P を中心として線分 QR を回転してできるドーナツ状の図形の外径は PQ , 内径は PR となり, その面積 $S(t)$ は,

$$PQ^2 = (-\frac{2}{3}t)^2 + (\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2 = \frac{2}{3}t^2$$

$$\begin{aligned} PR^2 &= (\frac{t}{3} - 1 + \sqrt{1-t})^2 + (-\frac{2}{3}t + 1 - \sqrt{1-t})^2 + (\frac{t}{3})^2 \\ &= \frac{2}{3}t^2 - 4(t-1) - 2(2-t)\sqrt{1-t} \end{aligned}$$

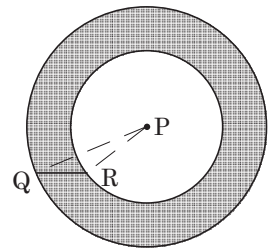
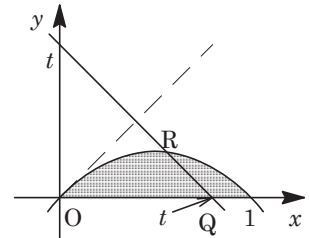
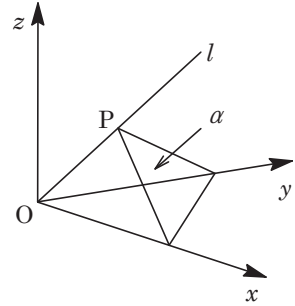
$$S(t) = \pi(PQ^2 - PR^2) = \pi\{4(t-1) + 2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて, 直線 l の $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の部分を正とする l 軸を設定し, $l = OP$ とおくと, $t \geq 0$ において,

$$l = \sqrt{(\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって, $\frac{dl}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となり, 求める回転体の体積 V は,

$$V = \int_0^1 S(t) \frac{dl}{dt} dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 \{4(t-1) + 2(2-t)\sqrt{1-t}\} dt$$



ここで、 $1-t=u$ とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_1^0 \{ -4u + 2(u+1)\sqrt{u} \} (-du) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 (-4u + 2u\sqrt{u} + 2\sqrt{u}) du \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[-2u^2 + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(-2 + \frac{4}{5} + \frac{4}{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{45} \pi \end{aligned}$$

[解説]

過去問を探す気分にはなりません、20 年以上も前には、よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ 、内径がいつも PR で、場合分けが必要ないのにはホッとします。なお、空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。