**1**

解答解説のページへ

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を $\alpha$ とするとき, $J$ を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された $J$ と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

**2**

解答解説のページへ

$a$ を正の整数とする。正の実数 $x$ についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような $a$ を小さい順に並べたものを $a_1$，$a_2$，$a_3$，…とする。ここに $[\ \ ]$ はガウス記号で，実数 $u$ に対し，$[u]$ は $u$ 以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7$，8，9 の各々について(＊)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 $x$ を求めよ。

(2)　$a_1$，$a_2$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

1から$n$までの数字がもれなく一つずつ書かれた$n$枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数である確率を$p(n)$とする。

(1)　$p(8)$を求めよ。

(2)　正の整数$k$に対し，$p(3k+2)$を$k$で表せ。

**4**

解答解説のページへ

$a$ を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} \leqq 2$ ならば $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} \leqq \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を $D$ とする。$D$ を図示せよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ に対して，

$$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x=-x\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)=0$ は唯一の解をもつ。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $2$ |

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，$1-\cos\alpha=\alpha\sin\alpha$ ………(＊)

$$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}-f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)dx$$

ここで，$F(x)=\int f(x)dx$ とおくと，

$$F(x)=\int(1-\cos x-x\sin x)dx=x-\sin x+x\cos x-\int\cos x\,dx$$
$$=x-2\sin x+x\cos x+C$$

よって，(＊)を用いると，

$$J=-\left[F(x)\right]_0^{\alpha}+\left[F(x)\right]_{\alpha}^{\pi}=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$$
$$=-2\alpha+4\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha$$
$$=-2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+4\sin\alpha=2\sin\alpha$$

(3)　(1)より，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるが，

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1-\frac{3}{4}\pi\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1.4+1-\frac{3}{4}\times3.2\right)=0$$

これより，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$ となり，

$$J=2\sin\alpha>2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$$

## ［解　説］

微積分の標準的な問題です。誘導も細かく付けられています。

**2**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$x$ を正の実数として，$x=\left[\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\right]$……(∗)が解をもつ条件は,

$$x \leqq \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) < x+1 \quad (x\text{は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$2x^2 \leqq x^2+a$ から，$x \leqq \sqrt{a}$

また，$x^2+a < 2x^2+2x$ から $x^2+2x-a > 0$ となり，$x > \sqrt{a+1}-1$ より，①は,

$$\sqrt{a+1}-1 < x \leqq \sqrt{a} \quad (x\text{は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$ のとき，②から $\sqrt{8}-1 < x \leqq \sqrt{7}$ となり，解は $x=2$

$a=8$ のとき，②から $3-1 < x \leqq \sqrt{8}$ となり，解なし

$a=9$ のとき，②から $\sqrt{10}-1 < x \leqq 3$ となり，解は $x=3$

(2)　$a=1$ のとき，②から $\sqrt{2}-1 < x \leqq 1$ となり，解は $x=1$

$a=2$ のとき，②から $\sqrt{3}-1 < x \leqq \sqrt{2}$ となり，解は $x=1$

$a=3$ のとき，②から $2-1 < x \leqq \sqrt{3}$ となり，解なし

$a=4$ のとき，②から $\sqrt{5}-1 < x \leqq 2$ となり，解は $x=2$

$a=5$ のとき，②から $\sqrt{6}-1 < x \leqq \sqrt{5}$ となり，解は $x=2$

$a=6$ のとき，②から $\sqrt{7}-1 < x \leqq \sqrt{6}$ となり，解は $x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (∗)が解をもたないのは，$a=3,\ 8,\ \cdots$ となり,

$$a_1=3,\quad a_2=8$$

(3)　まず, $n$ を正の整数として,

(i)　$n^2 \leqq a < (n+1)^2-1$ ($n \leqq \sqrt{a}$ かつ $\sqrt{a+1}-1 < n$) のとき

②の整数解は，$x=n$ である。

(ii)　$a=(n+1)^2-1$ のとき

②に代入すると，$n < x \leqq \sqrt{(n+1)^2-1}$ ………③

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} < \dfrac{2n}{n+n}=1$ から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ となり,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

［解 説］

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

**3**

問題のページへ

(1)　8 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が 3 となる確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{28}$，小さい方が 6 となる確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{28}$ であるので,

$$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$$

(2)　$3k+2$ 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_{3k+2}\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が $3l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ となる確率は,

$$\frac{{}_{3k+2-3l}\mathrm{C}_1}{{}_{3k+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ の和をとると,

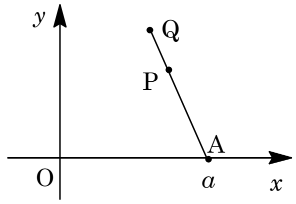
$$p(3k+2)=\sum_{l=1}^{k}\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}\cdot\frac{(3k-1)+2}{2}\cdot k=\frac{k}{3k+2}$$

［解　説］

不思議なぐらい基本的な問題です。なお，(2)の和は，シグマの公式でなく，等差数列の和として計算しています。

**4**

問題のページへ




半直線 AP 上の点 Q に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおく。

すると，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} \leqq 2$ より，$\mathrm{P}(x,\ y) \neq \mathrm{A}(a,\ 0)$ のもとで，

$$0 \leqq t \leqq 2$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a + t(x-a),\ ty)$$

$$= (a(1-t) + tx,\ ty)$$

さて，$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} \leqq \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}} \neq \vec{0}$ ……①のもとで，

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{QP} \leqq \mathrm{OQ}\cdot\mathrm{AP} \cdots\cdots\text{②}$$

①から，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \neq t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \neq \vec{0}$ から $0 < t \leqq 2$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \neq \dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

すると，$\dfrac{1}{t} \geqq \dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は, $x$ 軸上の $x \leqq \dfrac{a}{2}$ の部分には存在しない。

また，②から，$a|1-t||\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$，$a^2(1-t)^2 \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ となり，

$$a^2(1-t)^2 \leqq \{a(1-t)+tx\}^2 + t^2y^2,\ (x^2+y^2-2ax)t^2 + 2axt \geqq 0 \cdots\cdots\text{③}$$

③は，$t=0$ では成立しているので，$0 < t \leqq 2$ でつねに成立する条件を求める。

そこで，$0 < t \leqq 2$ において，③は,

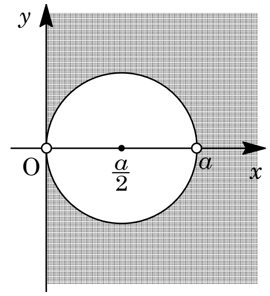
$$(x^2+y^2-2ax)t + 2ax \geqq 0$$

$f(t) = (x^2+y^2-2ax)t + 2ax$ とおくと，求める条件は,

$$f(0) = 2ax \geqq 0,\ f(2) = 2x^2 + 2y^2 - 2ax \geqq 0$$

まとめると, $x \geqq 0$ かつ $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 \geqq \dfrac{a^2}{4}$

よって，条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在領域 $D$ は，右図の網点部となる。ただし，白丸以外の境界は領域に含む。




［解 説］

問題文に与えられた条件が比の形で書かれているため，取り組みにくい感じがします。なお，点 Q はこの条件を満たす任意の点として解答をしています。