1　解答解説のページへ

n を自然数とする。xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換(移動ともいう)を f_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 原点 O(0, 0) を通る直線で，その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが 2 本あることを示し，この 2 直線の方程式を求めよ。

(2) (1)で得られた 2 直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t - x\sin 2t\right|dt$ とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

定数 k は $k>1$ を満たすとする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X, Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ を満たしながら動いている。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX，OY が交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を k を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする。この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問いに答えよ。

(1) D と同じ平面上の直線 l は D のどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線は l と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ。

(2) D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　原点を通る直線の方程式を，$y=mx$ または $x=0$ と表す。

(i)　$y=mx$ のとき

この直線上の任意の点を $(t,\ mt)$ とすると，f_n によって移される点は,

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-n+m)t \\ (-n^2-n+mn+2m)t \end{pmatrix}$$

この点が，$y=mx$ 上にあることより，$(-n^2-n+mn+2m)t=m(1-n+m)t$

任意の t に対して成立するので,

$$-n^2-n+mn+2m=m(1-n+m),\ \ m^2-(2n+1)m+n(n+1)=0$$

すると，$(m-n)(m-n-1)=0$ から，$m=n,\ n+1$

(ii)　$x=0$ のとき

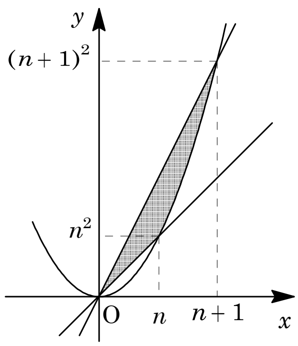
この直線上の任意の点を $(0,\ t)$ とすると，f_n によって移される点は,

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ (n+2)t \end{pmatrix}$$

この点は，$t\neq 0$ のとき $x=0$ 上にないので，条件に適さない。

(i)(ii)より，求める 2 直線の方程式は，$y=nx$，$y=(n+1)x$ である。

(2)　曲線 $y=x^2$ と直線 $y=nx$，$y=(n+1)x$ の原点以外の交点は，それぞれ $(n,\ n^2)$，$(n+1,\ (n+1)^2)$ となり，右図の網点部の面積 S_n は,



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(n+1)(n+1)^2-\frac{1}{2}n\cdot n^2-\int_n^{n+1}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^3-\frac{1}{2}n^3-\left\{\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}n^3\right\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{6}n^3=\frac{1}{6}(3n^2+3n+1) \end{aligned}$$

(3)　$S_n-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}(n^2+n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2 \end{aligned}$$

［解　説］

不変直線を題材にした基本問題です。計算量も少なめです。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt$ を変形して，

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-2x\sin t\cos t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t|1-2x\sin t|dt$$

(i)　$2x<1\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1-2x\sin t)dt=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x$$

(ii)　$2x\geqq 1\left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right)$のとき

まず，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$1=2x\sin t$ である t はただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2x}$ となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\alpha}\cos t(1-2x\sin t)dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}-\cos t(1-2x\sin t)dt\\&=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\sin\alpha-x\sin^2\alpha-(1-x)+\sin\alpha-x\sin^2\alpha\\&=2\cdot\frac{1}{2x}-2x\cdot\frac{1}{4x^2}-1+x=x+\frac{1}{2x}-1\end{aligned}$$

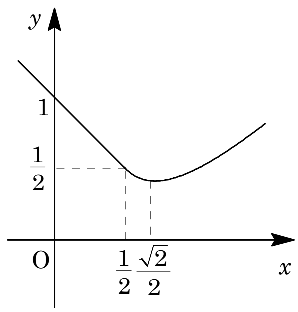
すると，$f'(x)=1-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

(2)　$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dx\\&=\frac{3}{8}+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log x-x\right]_{\frac{1}{2}}^1\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

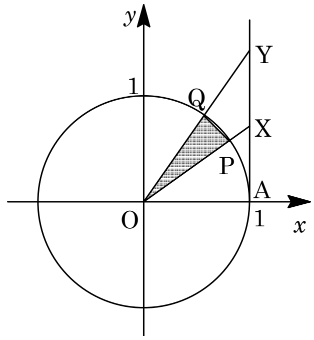


［解　説］

昨年と同様な絶対値の付いた関数の定積分です。(1)の最小値については，相加平均と相乗平均の関係を利用する手もあります。

3

問題のページへ



$t>0$ として，X(1, t) とおくと，条件より，Y(1, kt) となる。ここで，$\angle\mathrm{AOX}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOY}=\beta$ とおくと，

$$\tan\alpha=t,\ \tan\beta=kt\cdots\cdots\cdots①$$

さて，△OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

S が最大となるのは，$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $\beta-\alpha$ が最大となるときである。すなわち，$\tan(\beta-\alpha)$ が最大値をとる場合である。

そこで，$f(t)=\tan(\beta-\alpha)$ とおくと，①から，$f(t)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{(k-1)t}{1+kt^2}$

$$f'(t)=\frac{(k-1)\{(1+kt^2)-t\cdot2kt\}}{(1+kt^2)^2}$$

$$=\frac{(k-1)(1-kt^2)}{(1+kt^2)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$f(t)$ の値は右表のように増減し，$t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のときに最大となる。よって，最大値は，

$$\tan(\beta-\alpha)=f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(k-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}}{1+k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

このとき，$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{\sqrt{(2\sqrt{k})^2+(k-1)^2}}=\dfrac{k-1}{k+1}$ となり，②から S の最大値は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{k-1}{2(k+1)}$$

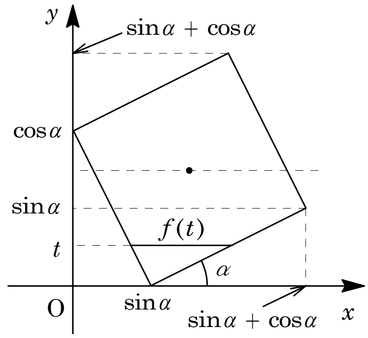
［解　説］

図形量の最大値を問う基本題です。θ が鋭角のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ は，ともに単調増加する関数という事実を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　1 辺の長さが 1 である正方形 D を，右図のように配置し，D を直線 $y=k$ のまわりに回転させて得られる回転体を考える。ここで，D の対角線の交点が $\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2},\ \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}\right)$ であるので，対称性から $0\leqq k\leqq\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ とし，さらに $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ としても一般性を失わない。



さて，直線 $y=t\ (0\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha)$ が，D によって切り取られる線分の長さを $f(t)$ とすると，

(a)　$0\leqq t\leqq\sin\alpha$ のとき　$f(t):\dfrac{1}{\cos\alpha}=t:\sin\alpha$ より，$f(t)=\dfrac{t}{\sin\alpha\cos\alpha}$

(b)　$\sin\alpha\leqq t\leqq\cos\alpha$ のとき　$f(t)$ は定数であり，$f(t)=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

(c)　$\cos\alpha\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha$ のとき

$$f(t):\frac{1}{\cos\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha-t):\sin\alpha \text{ より，} f(t)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-t}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

以下，正方形 D の直線 $y=k$ まわりの回転体の体積を考える。

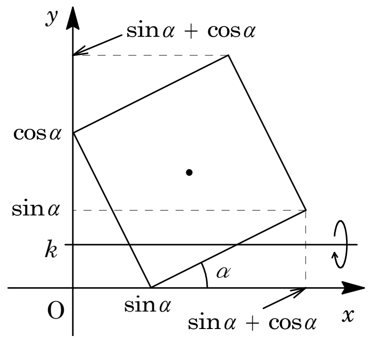
(i)　$k=0$ のとき

このときの回転体の体積を V_0 とすると，$V_0=\displaystyle\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt$

(ii)　$0<k\leqq\sin\alpha$ のとき

このときの回転体の体積を V_1 とすると，

$$\begin{aligned}V_1&=\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi(t-k)f(t)\,dt\\&<\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\\&<\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\end{aligned}$$



よって，$V_1<V_0$ である。

(iii)　$\sin\alpha\leqq k\leqq\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ のとき

このときの回転体の体積を V_2 とすると，

$$\begin{aligned}V_2&\leqq\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi(t-k)f(t)\,dt\\&<\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^k tf(t)\,dt-\int_0^k(k-t)f(t)\,dt$ とおくと，

$$I=\int_0^k(2t-k)f(t)dt=\int_0^{\sin\alpha}\frac{(2t-k)t}{\sin\alpha\cos\alpha}dt+\int_{\sin\alpha}^k\frac{2t-k}{\cos\alpha}dt$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Big[\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}kt^2\Big]_0^{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\Big[t^2-kt\Big]_{\sin\alpha}^k$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha}\Big(\frac{2}{3}\sin^2\alpha-\frac{1}{2}k\sin\alpha\Big)-\frac{1}{\cos\alpha}(\sin^2\alpha-k\sin\alpha)$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Big(-\frac{1}{3}\sin\alpha+\frac{1}{2}k\Big)=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\Big(-\frac{2}{3}\sin\alpha+k\Big)>0$$

よって，$I>0$ から，$\displaystyle\int_0^k(k-t)f(t)dt<\int_0^k tf(t)dt$ となり，

$$\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)dt<\int_0^k 2\pi tf(t)dt\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle V_2<\int_0^k 2\pi tf(t)dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt=\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt$

よって，$V_2<V_0$ である。

(i)～(iii)より，回転体の体積は，軸が D と唯 1 点で交わるときに最大となる。

(2)　(1)より，$\displaystyle V_0=2\pi\int_0^{\sin\alpha}tf(t)dt+2\pi\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}tf(t)dt+2\pi\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}tf(t)dt$

ここで，$\displaystyle I_1=\int_0^{\sin\alpha}tf(t)dt=\int_0^{\sin\alpha}\frac{t^2}{\sin\alpha\cos\alpha}dt=\frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}$

$$I_2=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}tf(t)dt=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\frac{t}{\cos\alpha}dt=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

さらに，$s=t-\cos\alpha$ とおくと，

$$I_3=\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}tf(t)dt=\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}\frac{t(\sin\alpha+\cos\alpha-t)}{\sin\alpha\cos\alpha}dt$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha}(s+\cos\alpha)(\sin\alpha-s)ds$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha}\{-s^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)s+\sin\alpha\cos\alpha\}ds$$
$$=-\frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}+\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha}+\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{6\cos\alpha}+\frac{1}{2}\sin\alpha$$

よって，$V_0=2\pi(I_1+I_2+I_3)=\pi(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}\pi\sin\Big(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\Big)$

すると，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，V_0 は $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}\pi$ をとる。

また，$\alpha=0$ のとき，回転体の体積の最大値は，$\pi\cdot1^2\cdot1=\pi$ となる。

以上より，求める回転体の体積の最大値は，$\sqrt{2}\pi$ である。

［解 説］

一瞥した瞬間，難問というのがわかります。いわゆる円筒分割を利用した解答例ですが，評価の甘い箇所と辛い箇所が混在しています。