1

解答解説のページへ

(1)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ。

(2)　6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

2

解答解説のページへ

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\mathit{\Delta}(A)=ad-bc$，$t(A)=a+d$ と定める。

(1)　2 次の正方行列 A, B に対して，$\mathit{\Delta}(AB)=\mathit{\Delta}(A)\mathit{\Delta}(B)$ が成り立つことを示せ。

(2)　A の成分がすべて実数で，$A^5=E$ が成り立つとき，$x=\mathit{\Delta}(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ。ただし，E は 2 次の単位行列とする。

3

解答解説のページへ

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ と楕円 $C_2 : x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。

(1)　C_1 が C_2 に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対して，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$ ………(＊)

さて，すべての正の整数 n について，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は 5 の整数倍になることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(＊)を利用すると，

$$\alpha^1+\beta^1-3^1=0,\ \alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9=-10$$

ともに，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は 5 の整数倍になる。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$l,\ m$ を整数として，5 の整数倍を仮定すると，

$$\alpha^k+\beta^k-3^k=5l,\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5m$$

このとき，$\alpha^2=3\alpha-5$，$\beta^2=3\beta-5$ に注意して，

$$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}=3\alpha^{k+1}-5\alpha^k+3\beta^{k+1}-5\beta^k-3^{k+2}$$

$$=3(5m+3^{k+1})-5(5l+3^k)-3^{k+2}=5(3m-5l-3^k)$$

$n=k+2$ のときも 5 の整数倍となる。

(i)(ii)より，すべての正の整数 n について，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は 5 の整数倍になる。

(2)　6 個のさいころを同時に投げるとき，6^6 通りの目の出方が同様に確からしい。

ちょうど 4 種類の目が出るとき，その目の選び方が ${}_6\mathrm{C}_4=15$ 通りある。このとき，次の 2 つの場合について，その出方の数を求める。

(i)　同じ目が 3 個出るとき

同じ目の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1=4$ 通りで，さいころとの対応は $\dfrac{6!}{3!}$ 通りである。

(ii)　同じ目が 2 個ずつ 2 種類出るとき

同じ目の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りで，さいころとの対応は $\dfrac{6!}{2!2!}$ 通りである。

(i)(ii)より，ちょうど 4 種類の目が出る確率は，

$$\frac{15\times\left(4\times\frac{6!}{3!}+6\times\frac{6!}{2!2!}\right)}{6^6}=\frac{15\times(4\times5!+3\times3\times5!)}{6^6}=\frac{15\times13\times5!}{6^6}=\frac{325}{648}$$

［解　説］

(1)は数学的帰納法を利用する有名問題です。(2)は難しくはないものの，ミスをしていないかどうか，気にかかる問題です。

2

問題のページへ

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$に対して，$AB=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$となり，

$$\begin{aligned}\Delta(AB)&=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\&=adps+bcqr-(adqr+bcps)=ad(ps-qr)-bc(ps-qr)\\&=(ad-bc)(ps-qr)=\Delta(A)\Delta(B)\end{aligned}$$

(2) $A^5=E$から$\Delta(A^5)=\Delta(E)$となり，(1)より，$(\Delta(A))^5=1$

Aの成分がすべて実数より，$\Delta(A)$は実数となるので，$x=\Delta(A)=1$

すると，ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2=yA-xE=yA-E$となり，

$$\begin{aligned}A^5&=(A^2)^2A=(yA-E)^2A=(y^2A^2-2yA+E)A\\&=(y^3A-y^2E-2yA+E)A=(y^3-2y)A^2+(-y^2+1)A\\&=(y^3-2y)(yA-E)+(-y^2+1)A=(y^4-3y^2+1)A+(-y^3+2y)E\end{aligned}$$

$A^5=E$より，$(y^4-3y^2+1)A+(-y^3+2y-1)E=O$ ………(＊)

(i) $y^4-3y^2+1\neq 0$のとき

(＊)より，$A=\dfrac{y^3-2y+1}{y^4-3y^2+1}E$となり，$A=kE$ (k は実数)とおくことができる。

すると，$A^5=E$より$k^5=1$となり，$k=1$すなわち$A=E$であり，このとき，$y=t(A)=2$となる

(ii) $y^4-3y^2+1=0$のとき

(＊)より，$(-y^3+2y-1)E=O$となり，$y^3-2y+1=0$から，

$$(y-1)(y^2+y-1)=0$$

よって，$y=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$である。

$y=1$のとき，$y^4-3y^2+1=-1\neq 0$となり，不適である。

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$のとき，$y^2+y-1=0$から，$y^2=-y+1$となり，

$$y^4-3y^2+1=(-y+1)^2-3(-y+1)+1=y^2+y-1=0$$

よって，適する。

(i)(ii)より，$y=2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$である。

［解 説］

(1)の行列式の定理が，(2)の誘導となっています。内容は，ハミルトン・ケーリーの定理を用いて次数下げをする頻出のものです。

3

問題のページへ

$x>0$ において，$f(x)=e^x-x^e$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$$

ここで，$g_1(x)=e^{x-1}$，$g_2(x)=x^{e-1}$ とし，$F(x)=\log g_1(x)-\log g_2(x)$ とおくと，

$$F(x)=x-1-(e-1)\log x$$

$$F'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$F(x)$ の値の増減は右表のようになり，$F(1)=F(e)=0$ に注意すると，$1<e-1<e$ から，$0<x<1$ または $e<x$ のとき $F(x)>0$，$1<x<e$ のとき $F(x)<0$ となる。

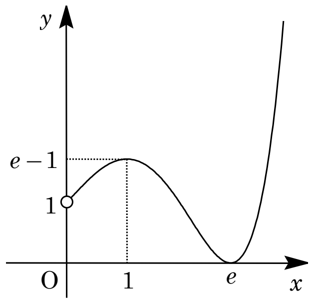
さらに，$f'(x)$ の符号と $F(x)$ の符号は一致することより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x^e)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\infty$$

これより，$x>0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数は，



$k<0$ のとき 0 個

$k=0$，$k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq1$，$k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

［解　説］

微分の応用問題ですが，スムーズな処理を行うために，上の解答例では，対数をとりました。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ は，証明なしで利用しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の範囲は，$0 \leqq 4nx \leqq 2n\pi$ から，

$$2k\pi + x \leqq 4nx \leqq (2k+1)\pi - x \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すると，$2k\pi + x \leqq 4nx$ より，$x \geqq \dfrac{2\pi}{4n-1}k$

また，$4nx \leqq (2k+1)\pi - x$ より，$x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1}$

よって，$\dfrac{2\pi}{4n-1}k \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \cdots\cdots\cdots(*)$

$(*)$の x の区間の長さを d_k，その総和を S_n とおくと，

$$d_k = \frac{2\pi}{4n+1}k + \frac{\pi}{4n+1} - \frac{2\pi}{4n-1}k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{2\pi}{4n+1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{\pi}{4n+1}n - \frac{2\pi}{4n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{n^2}{4n+1}\pi - \frac{n(n-1)}{4n-1}\pi = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\pi = \frac{1}{8}\pi$ となる。

［解　説］

最初は和積公式で変形しましたが，深みにはまりそうなので，不等式を満たす x の範囲を，$x \leqq 4nx \leqq \pi - x$，$2\pi + x \leqq 4nx \leqq 2\pi + \pi - x$，$4\pi + x \leqq 4nx \leqq 4\pi + \pi - x$，$\cdots$として求め，それをまとめたのが，上の解答例です。

5

問題のページへ

(1) 円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ 上の任意の点を $(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおくと，C_1 が楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に内接する条件は，ある θ において等号が成り立ち，

$$(a+a\cos\theta)^2+\frac{a^2\sin^2\theta}{b^2}\leqq 1,\ \ a^2b^2(1+\cos\theta)^2+a^2(1-\cos^2\theta)\leqq b^2 \cdots\cdots\cdots①$$

①を変形し，$a^2(b^2-1)\cos^2\theta+2a^2b^2\cos\theta+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0$

ここで，$t=\cos\theta$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ において，

$$a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0 \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，ある t $(-1\leqq t\leqq 1)$ で等号が成り立つ。

以下，$a>0$，$b>0$ のもとで，②が成り立つ条件を求める。

まず，$f(t)=a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2$ とおき，

(i) $b>1$ のとき

$f(-1)=-b^2<0$ となるので，求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$

よって，$(4a^2-1)b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(ii) $b=1$ のとき

$f(t)=2a^2t+2a^2-1$ となり，求める条件は，$f(1)=4a^2-1=0$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

(iii) $0<b<1$ のとき

$$f(t)=a^2(b^2-1)\Big(t+\frac{b^2}{b^2-1}\Big)^2-\frac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2$$

ここで，$-\dfrac{b^2}{b^2-1}=\dfrac{b^2}{1-b^2}>0$ に注意して，

(iii-i) $0<-\dfrac{b^2}{b^2-1}\leqq 1\ \Big(0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ のとき

求める条件は，$f\Big(-\dfrac{b^2}{b^2-1}\Big)=-\dfrac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2=0$ から，

$$-a^2b^4+(b^2-1)(a^2b^2+a^2-b^2)=0,\ \ a^2+b^4-b^2=0$$

よって，$a=\sqrt{b^2-b^4}=b\sqrt{1-b^2}$

(iii-ii) $-\dfrac{b^2}{b^2-1}>1\ \Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<1\Big)$ のとき

求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(i)～(iii)より，C_1 が C_2 に内接するための条件は，

$$a=b\sqrt{1-b^2}\ \Big(0<b\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\Big),\ \ a=\frac{1}{2}\Big(b>\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\Big)$$

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすので，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

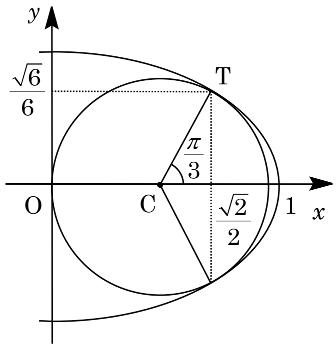
このとき，$f(t)=0$ の重解は，$t=-\dfrac{b^2}{b^2-1}=-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となり，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

すると，第 1 象限の接点の座標 $\mathrm{T}(p,\ q)$ は，

$$p=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ q=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(3)　(2)のとき，$C_1:\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{2}{9}$ となり，中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の円である。そして，半径 CT を x 軸の正の向きから測った角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。



また，$C_2:x^2+3y^2=1$ となり，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}$

すると，$x\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は，x 軸についての対称性を考えて，

$$\frac{S}{2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{1}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって，$S=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{2}{27}\right)\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ となる。

［解　説］

円をパラメータ表示して，2 次不等式の処理に帰着させましたが，かなり時間がかかる問題です。なお，楕円をパラメータ表示した方が，数式処理は簡単だったようです。後から気づきましたが……。