1

解答解説のページへ

3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\ \ b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2)　$a_n - b_n$ は 4 の倍数であることを示せ。

2

解答解説のページへ

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つような a の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを投げて，出た目が 1 か 2 であれば行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 3 か 4 であれば行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 5 か 6 であれば行列 $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。そして，選んだ行列の表す 1 次変換によって xy 平面上の点 R を移すという操作を行う。点 R は最初は点$(0,\ 1)$にあるものとし，さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点$(0,\ 1)$にある確率を p_n，点$(0,\ -1)$にある確率を q_n とする。

(1)　p_1，p_2 と q_1，q_2 を求めよ。

(2)　p_n+q_n と $p_{n-1}+q_{n-1}$ の関係式を求めよ。また，p_n-q_n と $p_{n-1}-q_{n-1}$ の関係式を求めよ。

(3)　p_n を n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として $45°$ 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする。このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) x_k を k を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 連続する 3 整数の積$(k-1)k(k+1)$は 6 の倍数より，$a_n=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$は整数である。また，$n$は3以上の奇数より，$l$を自然数として$n=2l+1$と表すと，

$$b_n=\frac{n^2-1}{8}=\frac{1}{8}(4l^2+4l)=\frac{1}{2}l(l+1)$$

すると，$l(l+1)$は偶数なので，b_nは整数である。

(2) $a_n=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{4}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}$

$$=\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)=\frac{1}{24}(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)$$

$$=\frac{1}{6}l(l+1)(2l-1)(2l+1)$$

すると，$a_n-b_n=\dfrac{1}{6}l(l+1)(2l-1)(2l+1)-\dfrac{1}{2}l(l+1)$

$$=\frac{1}{6}l(l+1)\{(2l-1)(2l+1)-3\}=\frac{1}{6}l(l+1)(4l^2-4)$$

$$=\frac{2}{3}(l-1)l(l+1)^2$$

連続する3整数の積$(l-1)l(l+1)$は6の倍数より，a_n-b_nは4の倍数となる。

［解 説］

整数の基本問題です。なお，a_nは階差数列を作って求めましたが，普通に和の公式を適用しても構いません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　まず，$t>0$ のとき，$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}=\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$$

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

すると，$t>0$ のとき，$g'(t)>0$ から $g(t)>g(0)=0$ となり，すなわち $f'(t)>0$ から，$f(t)>f(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

(2)　(1)と同様にして，$t>0$ のとき，$h(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと，

$$h'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\frac{t}{a}e^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\frac{t}{a}\right)e^{\frac{t}{a}}$$

$k(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと，$k'(t)=\dfrac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

さて，$a>1$ より，$\dfrac{1}{a-1}>0$，$\dfrac{a-1}{a}>0$ となり，

(i)　$0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$　$(a\geqq 2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)>0$ から $k(t)>k(0)=0$ となり，すなわち $h'(t)>0$ から，$h(t)>h(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つ。

(ii)　$\dfrac{1}{a-1}>1$　$(1<a<2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在する。これを α とおくと $k(t)$ の増減は右表のようになり，$k(\alpha)<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ から，$\alpha<\beta$ を満たすある β に対して，$k(\beta)=0$ となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$k'(t)$		$-$	0	$+$	
$k(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$h'(\beta)=0$ である。すると，$h(t)$ の増減は右表のようになり，すべての $t>0$ に対して $h(t)>0$，すなわち $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ は成立しない。

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$a\geqq 2$ である。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ は証明なしで用いています。

3

問題のページへ

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を, それぞれ f_A, f_B, f_C とすると, f_A は原点中心の $-90°$ 回転, f_B は原点中心の $90°$ 回転, f_C は y 軸に関する折り返しを表す。また, それらが起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ ずつである。

さて, この 1 次変換により点 R を移すという操作を点 $(0,\ 1)$ から始めたとき, n 回の操作の後で点 $(0,\ 1)$ にある確率, 点 $(0,\ -1)$ にある確率を p_n, q_n とする。

まず, 1 回の操作を行った後, $(0,\ 1)$ にあるのは f_C のときより $p_1=\dfrac{1}{3}$, また $(0,\ -1)$ にある場合はないので $q_1=0$ である。

次に, 2 回の操作を行った後, $(0,\ 1)$ にあるのは $f_A\to f_B$, $f_B\to f_A$, $f_C\to f_C$ より $p_2=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, また $(0,\ -1)$ にあるのは $f_A\to f_A$, $f_B\to f_B$ より $q_2=\dfrac{2}{9}$ である。

(2) n 回の操作の後で点 $(1,\ 0)$, 点 $(-1,\ 0)$ にある確率は対称性より等しく, これらを合わせて r_n とする。すると, $p_n+q_n+r_n=1$ である。

さて, n 回の操作の後に $(0,\ 1)$ にあるのは, $n-1$ 回の操作の後で $(0,\ 1)$ のとき f_C, $(1,\ 0)$ のとき f_B, $(-1,\ 0)$ のとき f_A のいずれかの場合である。また, n 回の操作の後に $(0,\ -1)$ にあるのは, $n-1$ 回の操作の後で $(0,\ -1)$ のとき f_C, $(1,\ 0)$ のとき f_A, $(-1,\ 0)$ のとき f_B のいずれかの場合である。これらをまとめると,

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}\cdots\cdots\cdots①,\quad q_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②, ①－②を計算すると,

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}(1-p_{n-1}-q_{n-1})$$

$$=-\frac{1}{3}(p_{n-1}+q_{n-1})+\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

$$p_n-q_n=\frac{1}{3}(p_{n-1}-q_{n-1})\cdots\cdots\cdots④$$

(3) $p_0=1$, $q_0=0$ として, ③を $p_n+q_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$ と変形すると,

$$p_n+q_n-\frac{1}{2}=\left(p_0+q_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より, $p_n-q_n=(p_0-q_0)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤＋⑥より, $2p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ から, $p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

［解　説］

確率と漸化式の融合問題に, 1 次変換を味付けしたものとなっています。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ を原点を中心として 45° 回転した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s \end{pmatrix}$$

ここで, $s=\sqrt{2}t^2-2t$ より, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-\sqrt{2}t^2+2t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ ………①

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2}t^2-2t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t \text{ ………②}$$

(2)　②と $y=a$ を連立すると, $a=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ となり, $a=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

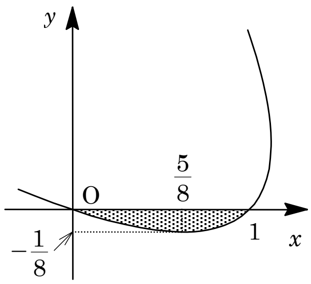
よって, 直線 $y=a$ と点 Q の軌跡である曲線 C がただ 1 つの共有点をもつのは, 実数 t の値がただ 1 つ存在するときより, $a=-\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　x 軸の下側のある曲線 C の $0\leqq x\leqq\dfrac{5}{8}$ の部分を $x=x_1$, $\dfrac{5}{8}\leqq x\leqq 1$ の部分を $x=x_2$ とする。①②から, $x=f(t)$, $y=g(t)$ とおくと,

$$(f(0),\ g(0))=(0,\ 0)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\frac{5}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=(1,\ 0)$$



そこで, 右図の網点部 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は,

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_2}^2dy-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_1}^2dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2g'(t)dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}\{f(t)\}^2g'(t)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2g'(t)dt=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

ここで, $\sqrt{2}t=u$ とおくと, $\sqrt{2}\,dt=du$ となり,

$$V=\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{2}u\right)^2\left(\sqrt{2}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(-u^2+3u)^2(2u-1)du=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(2u^5-13u^4+24u^3-9u^2)du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{2}{6}-\frac{13}{5}+\frac{24}{4}-\frac{9}{3}\right)=\frac{11}{120}\pi$$

［解　説］

パラメータ積分によって体積を求める頻出問題です。

5

問題のページへ

(1)　$C: y = x^3 + x^2 + 1$ ……①上の点 $\mathrm{P}_0(1,\ 3)$ における接線を $l_0: y = m_0x + n_0$ ……②とおき，①②を連立すると，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0) = 0 \text{ ………③}$$

ここで，③は重解 $x = 1$ をもち，もう 1 つの解を $x = x_1$ とおく。すると，③の左辺は因数 $(x-1)^2(x-x_1)$ をもち，さらに x^3 の係数を比較して恒等式を作ると，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0) = (x-1)^2(x-x_1) \text{ ………④}$$

④の x^2 の係数を比べると，$1 = -x_1 - 2$ から，$x_1 = -3$ となる。

さて, C と l_0 によって囲まれた部分において, C と l_0 の上下関係は変わらないので, その面積 S_1 は，④より，

$$S_1 = \left| \int_{-3}^{1} \{x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0)\}dx \right| = \left| \int_{-3}^{1} (x-1)^2(x+3)dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{12}\{1-(-3)\}^4 \right| = \frac{64}{3}$$

(2)　点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線を $l_{k-1}: y = m_{k-1}x + n_{k-1}$ とする。

(1)と同様にすると，方程式 $x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1}) = 0$ は，重解 $x = x_{k-1}$ ともう 1 つの解 $x = x_k$ をもつことより，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1}) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k) \text{ ………⑤}$$

⑤の x^2 の係数を比べると，$1 = -x_k - 2x_{k-1}$ から，$x_k = -2x_{k-1} - 1$ ………⑥

⑥より，$x_k + \frac{1}{3} = -2\left(x_{k-1} + \frac{1}{3}\right)$ となり，$x_0 = 1$ から，

$$x_k + \frac{1}{3} = \left(x_0 + \frac{1}{3}\right)(-2)^k = \frac{1}{3}(-2)^{k+2},\quad x_k = \frac{1}{3}\{(-2)^{k+2} - 1\}$$

(3)　$$S_k = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1})\}dx \right| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2(x - x_k)dx \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{12}(x_k - x_{k-1})^4 \right| = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2} - 1\} - \frac{1}{3}\{(-2)^{k+1} - 1\}\right]^4$$

$$= \frac{1}{12}\left\{\frac{1}{3}(-2-1)(-2)^{k+1}\right\}^4 = \frac{1}{12}\left\{-(-2)^{k+1}\right\}^4 = \frac{16^{k+1}}{12}$$

すると，$\frac{1}{S_k} = 12\left(\frac{1}{16}\right)^{k+1}$ となり，$0 < \frac{1}{16} < 1$ より $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ は収束し，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k} = \frac{12\left(\frac{1}{16}\right)^2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{20}$$

［解　説］

3 次曲線とその接線で囲まれる図形の面積を題材にした超有名問題です。そのため，やや雑な解答例となっています。