**1**

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべての$n$に対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を $\mathrm{H}'$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，$p, q, r$ および $s, t$ を $x$ の式で表せ。

(2) 四面体 OABC の体積 $V$ を $x$ の式で表せ。また，$x$ が変化するときの $V$ の最大値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と $x$ 軸，$y$ 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，$y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を $A$ とする。

(1) $A$ の体積 $V$ を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り $x$ 軸と垂直な平面による $A$ の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

**4**

解答解説のページへ

$xy$ 平面上を運動する点 P の時刻 $t$ $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 $t$ における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が $y$ 軸に平行になるような $t$ $(t>0)$ のうち，最も小さいものを $t_1$，次に小さいものを $t_2$ とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

**5**

解答解説のページへ

$n$ を相異なる素数 $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_k$ $(k \geqq 1)$ の積とする。$a$, $b$ を $n$ の約数とするとき, $a$, $b$ の最大公約数を $G$, 最小公倍数を $L$ とし, $f(a,\ b)=\dfrac{L}{G}$ とする。

(1)　$f(a,\ b)$ が $n$ の約数であることを示せ。

(2)　$f(a,\ b)=b$ ならば, $a=1$ であることを示せ。

(3)　$m$ を自然数とするとき, $m$ の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。$S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)$ が偶数であることを示せ。

**1**　　問題のページへ

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$ に対して，$a_1=5$ から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$$a_3=4-\frac{1}{\frac{11}{3}-2}=\frac{17}{5},\ \ a_4=4-\frac{1}{\frac{17}{5}-2}=\frac{23}{7}$$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\frac{1}{a_k-2}=4-\frac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{6k+5}{2k+1}=\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(2)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right)$ とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$ となり，

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\frac{s_n}{t_n}\leqq\frac{3t_n+2n}{t_n}=3+\frac{2n}{t_n}=3+\frac{4}{n+1}$$

(3)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$ から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$ となり，(2)から，

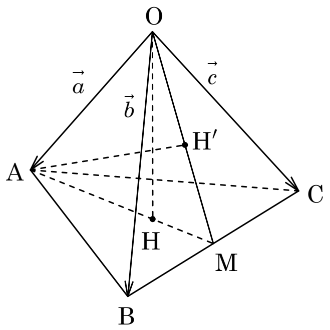
$$3<b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}$$

よって，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{4}{n+1}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$ である。

［解　説］

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお，(1)は普通に，推測→帰納法のパターンで記していますが，式変形により漸化式を解くことも可能です。

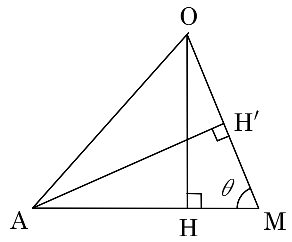
**2**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ




(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ より，辺 BC の中点を M とおくと，四面体 OABC は平面 OAM に関して対称となる。

すると，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H，および頂点 A から平面 OBC に下ろした垂線の足 H′は平面 OAM 上にある。

ここで，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AM}=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}$ より，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$ とおくと，




$$\cos\theta=\frac{\frac{3}{4}+x^2-\frac{1}{4}-1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}}=\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)より，$\mathrm{MH}=\mathrm{OM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{MH}:\mathrm{AM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}:\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}=(2x^2-1):(4x^2-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\vec{a}+\dfrac{x^2}{4x^2-1}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ より，$p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}$，$q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

また，(＊)より，$\mathrm{MH}'=\mathrm{AM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}$ となり，

$$\mathrm{MH}':\mathrm{OM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}:\frac{\sqrt{3}}{2}=(2x^2-1):3$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\left(1-\dfrac{2x^2-1}{3}\right)\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2(2-x^2)}{3}\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$s=t=\dfrac{2-x^2}{3}$

(2)　(＊)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{(2x^2-1)^2}{3(4x^2-1)}}=\dfrac{2\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{AH}'=\mathrm{AM}\sin\theta=\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}$$

ここで，正三角形 OBC の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となるので，四面体 OABC の体積 $V$ は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AH}'=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+4x^2-1}$$

ここで，$V=\dfrac{1}{12}\sqrt{-(x^2-2)^2+3}$ と変形すると，$V$ は $x^2=2$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき最大となり，このとき辺 OA は面 OBC に垂直となる。

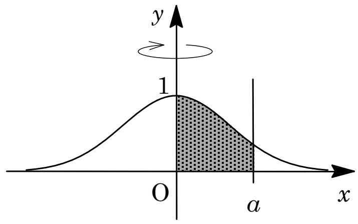
よって，$V$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用問題ですが，与えられた対称性をもとに図形的な解法をとっています。また，(2)において「$V$ を $x$ の式で表せ」という設問がなければ，最大値は辺 OA が面 OBC に垂直なときとして，いきなり導けますが……。

## ３

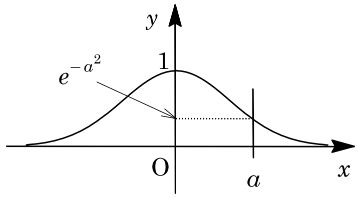
問題のページへ




(1)　曲線$y=e^{-x^2}$と $x$ 軸, $y$ 軸, および直線$x=a$で囲まれた図形を, $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体$A$の体積$V$は,

$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$

$$=-\pi\left(e^{-a^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$




(2)　$xy$平面に垂直に$z$軸をとり, $A$について平面$y=k$で切断したときの切り口を考えると,

(i)　$0\leqq k\leqq e^{-a^2}$のとき

切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$かつ$y=k$より,

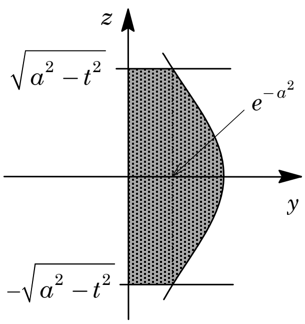
$$x^2+z^2=a^2\quad(0\leqq y\leqq e^{-a^2})\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$のとき

$y=e^{-x^2}$を変形すると$x^2=-\log y$, $x\geqq 0$において$x=\sqrt{-\log y}$となる。

すると, 切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$かつ$y=k$より,

$$x^2+z^2=-\log y\quad(e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$




さて, $A$を平面$x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$で切断すると,

①より, $0\leqq y\leqq e^{-a^2}$において, $t^2+z^2=a^2$から,

$$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$$

②より, $e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$において, $t^2+z^2=-\log y$から,

$$y=e^{-(z^2+t^2)}$$

よって, 切り口は右図の網点部となる。この面積を$S(t)$とすると, $-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$から,

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(z^2+t^2)}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3)　(2)より, $V=\displaystyle\int_{-a}^{a}S(t)dt\leqq\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\Big)dt=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt$

ここで, $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$とおくと, $\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt=I\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=I^2$

よって, $V\leqq I^2$すなわち$\sqrt{V}\leqq I$となり, (1)から$\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$

### ［解　説］

回転体 $A$ をいったん立式した後, 平面$x=t$によって切断し, その切り口を図示するというやや迂遠な解法で記しています。

## 4

問題のページへ

(1)　P$(x,\ y)$ に対して，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$$

これより，$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^3(2\cos^2 t-t\cos t\sin t+2\sin^2 t+t\sin t\cos t)=2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2,\ |\vec{v}|=t\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

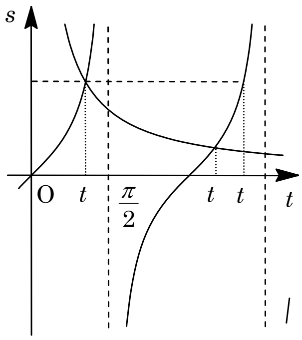
よって，$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$ である。

(2)　$t>0$ において，$\vec{v}$ が $y$ 軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$ から $2\cos t-t\sin t=0$

すなわち，$2\cos t=t\sin t$ から，$\cos t\neq 0$ となり，

$$\tan t=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$の解は，$s=\tan t$ と $s=\dfrac{2}{t}$ の交点の $t$ 座標として表せる。そして，正で最も小さいものを $t_1$，次に小さいものを $t_2$ とすると右図のようになる。




ここで，$t_3=t_1+\pi$ とおくと，$t_2<t_3$ となるので，

$$t_2-t_1<t_3-t_1=\pi$$

### ［解 説］

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 素数の集合 $P=\{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k\}$ の部分集合として，$Q=\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_i\}$，$R=\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_j\}$，$S=\{s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_l\}$を設定する。ただし，集合 $Q,\ R,\ S$ は，$Q\cap R=R\cap S=S\cap Q=\varnothing$ で，$i+j+l\leqq k$ であるとする。

さて，$n=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$ であり，$n$ の約数 $a,\ b$ を次のように表す。

$$a=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i\cdot r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j,\ \ b=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_l$$

そこで，$a,\ b$ の最大公約数を $G$，最小公倍数を $L$ とすると，

$$G=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i,\ \ L=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i\cdot r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_l$$

これより，$f(a,\ b)=\dfrac{L}{G}=r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_l$ であり，$R\subset P$ かつ $S\subset P$ より，$f(a,\ b)$ は $n=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$ の約数となる。

(2) $f(a,\ b)=b$ のとき，$r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_l=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i\cdot s_1\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_l$ より，

$$r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i$$

ここで，$r_1\cdot r_2\cdot\cdots\cdot r_j$ と $q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_i$ は互いに素なので，$j\geqq 1$，$i\geqq 1$ のときは成立しない。よって，$a=1\times 1=1$ である。

(3) 自然数 $m$ の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とすると，

$$S(f(a,\ b))=j+l,\ \ S(a)=i+j,\ \ S(b)=i+l$$

よって，$S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)=2(i+j+l)$ となり，この値は偶数である。

［解 説］

整数を題材とした論証問題です。ただ，素因数分解したとき，素数 1 つずつの積 $p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$ の形で表されるような自然数だけが対象となっています。なお，上の解答例では，約数 $a,\ b$ は正としています。また，記述に雑なところも少々……。