1

解答解説のページへ

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

(1)　点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2)　Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\triangle$ABC を 1 辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすようにとる。

(1) $\triangle$PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2) 点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3) $\triangle$PQR の面積を S とし，S のとり得る値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している。

(1)　S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2)　α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。

(1)　n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2)　n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする。

$$x=3\cos t-\cos 3t,\quad y=3\sin t-\sin 3t$$

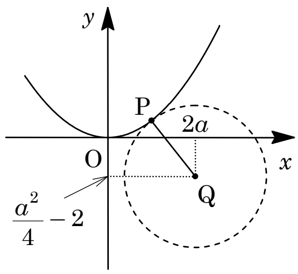
ただし，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点 $\mathrm{P}\Big(t,\ \dfrac{t^2}{4}\Big)$ と，点 $\mathrm{Q}\Big(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\Big)$ $(a>0)$ との距離は,

$$\mathrm{PQ}^2=(t-2a)^2+\Big(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\Big)^2$$

さて，$f(t)=\mathrm{PQ}^2$ とおくと,

$$f'(t)=2(t-2a)+2\Big(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\Big)\cdot\frac{t}{2}$$

$$=\frac{t^3}{4}+\Big(4-\frac{a^2}{4}\Big)t-4a=\frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16)$$

ここで，$f'(t)=0$ とすると，$t=a$ または $t^2+at+16=0$ ……(*)となり，(*)の判別式 $D=a^2-64=(a+8)(a-8)$ から,

(i)　$0<a<8$ のとき

$f'(t)=0$ の解は $t=a$ だけとなり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	a^2+4	$\nearrow$

よって，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ である。

(ii)　$a=8$ のとき

$f'(t)=\dfrac{1}{4}(t-8)(t+4)^2$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\searrow$	68	$\nearrow$

よって，$f(t)$ の最小値は $f(8)=68$ である。

(iii)　$a>8$ のとき

(*)の解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$a>0$ から $t=\alpha,\ \beta$ はともに負となり，$f(t)$ の増減は右表の通りで,

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	a^2+4	$\nearrow$

$$f(\alpha)=(\alpha-2a)^2+\Big(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\Big)^2\geqq(\alpha-2a)^2>4a^2$$

$$f(\alpha)-f(a)>4a^2-(a^2+4)=3a^2-4>0$$

よって，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ である。

(i)～(iii)より，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ となる。

以上より, PQ の最小値は $\sqrt{f(a)}=\sqrt{a^2+4}$ である。

(2)　放物線 C_1 と Q を中心とし半径 $\sqrt{2}a$ の円 $C_2: (x-2a)^2+\Big(y-\dfrac{a^2}{4}+2\Big)^2=2a^2$ の位置関係は, (1)から PQ の最小値が $\sqrt{a^2+4}$ であることを利用すると,

(i)　$\sqrt{2}a\geqq\sqrt{a^2+4}\ (a\geqq2)$ のとき

このとき，C_1 と C_2 の共有点は存在する。すると，C_1 上の点 P と C_2 上の点 R の距離はこの共有点において最小となり，最小値は 0 である。

(ii)　$\sqrt{2}a < \sqrt{a^2+4}$ $(0<a<2)$のとき

このとき，C_1 と C_2 の共有点は存在しない。すると，PQ の最小値が $\sqrt{a^2+4}$ より，C_1 上の点 P と C_2 上の点 R の距離の最小値は $\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$ である。

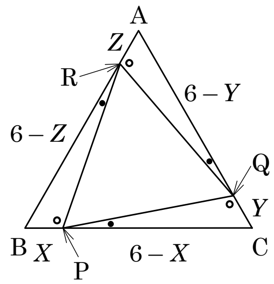
［解 説］

放物線と円が題材となっている最大・最小についての問題です。(1)では，論理の詰めをどのようにするかで，記述量に違いが出てきます。結論は明らかなのですが。

2

問題のページへ

(1)　1辺の長さ6の正三角形ABCに対し，点P，Q，Rを，それぞれ辺 BC，CA，AB 上に，$\mathrm{BP}=X$，$\mathrm{CQ}=Y$，$\mathrm{AR}=Z$ となるようにとる。



ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形のとき $\angle\mathrm{BRP}=\theta$ とおくと，

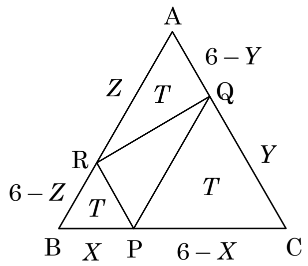
$\angle\mathrm{BPR}=120^\circ-\theta$，$\angle\mathrm{CPQ}=120^\circ-(120^\circ-\theta)=\theta$

同様に考えると，$\angle\mathrm{CQP}=120^\circ-\theta$ となり，

$\angle\mathrm{AQR}=\theta$，$\angle\mathrm{ARQ}=120^\circ-\theta$

すると，$\mathrm{RP}=\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ から $\triangle\mathrm{BPR}\equiv\triangle\mathrm{CQP}\equiv\triangle\mathrm{ARQ}$ となり，$X=Y=Z$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる確率は，$X=Y=Z=6$ も含めて $\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2)　与えられた T_1，T_2，T_3 に対して，T_1 と T_2 が正三角形，T_3 が正三角形でない場合を考える。



このとき，$X\neq6$，$Y\neq6$，$Z\neq6$，$X=6-Z$，$Y=6-X$，$Z\neq6-Y$ から，$(X,\ Y,\ Z)$ の組は，

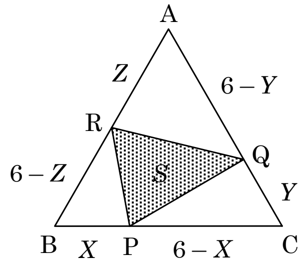
$(1,\ 5,\ 5)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 2)$，$(5,\ 1,\ 1)$

すると，T_2 と T_3 のみが正三角形，T_3 と T_1 のみが正三角形の場合も同様に4通りずつとなるので，T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど2つが正三角形になる確率は，$\dfrac{4\times3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot6^2\sin60^\circ-\frac{1}{2}\{X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)\}\sin60^\circ$$

$$=9\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\{X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)\}$$



ここで，$F=X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)$ とおくと，S が最小になるのは F が最大になるときである。

さて，F を X についてまとめると，

$F=(6-Y-Z)X-YZ+6Y+6Z$

まず，Y と Z の値を固定して，

(i)　$6-Y-Z>0$ $(2\leqq Y+Z\leqq5)$ のとき

$X=6$ のとき F は最大になり，$F=(6-Y-Z)\cdot6-YZ+6Y+6Z=-YZ+36$

次に Z を固定すると，$Y=1$ のとき F は最大になり，$F=-Z+36$

これより，$Z=1$ のとき F は最大値35をとる。

なお，条件 $6-Y-Z>0$ は満たされている。

(ii)　$6-Y-Z=0$ $(Y+Z=6)$ のとき

このとき，$F=-(6-Z)Z+6(6-Z)+6Z=Z^2-6Z+36=(Z-3)^2+27$

これより，$1\leqq Z\leqq 5$ なので $Z=1$ または $Z=5$ のとき F は最大値 31 をとる。

(iii) $6-Y-Z<0$ $(7\leqq Y+Z\leqq 12)$ のとき

$X=1$ のとき F は最大になり，

$$F=(6-Y-Z)-YZ+6Y+6Z=-YZ+5Y+5Z+6$$

次に Z を固定すると，$F=(5-Z)Y+5Z+6$

(iii-i)　$5-Z>0$ $(Z\leqq 4)$ のとき

$Y=6$ のとき F は最大になり，$F=(5-Z)\cdot 6+5Z+6=-Z+36$

これより，$Z=1$ のとき F は最大値 35 をとる。

なお，条件 $6-Y-Z<0$ は満たされている。

(iii-ii)　$5-Z=0$ $(Z=5)$ のとき

このとき，$F=-5+36=31$ となる。

(iii-iii)　$5-Z<0$ $(Z=6)$ のとき

このとき，$F=-Y+36$ から，$Y=1$ のとき F は最大になり最大値 35 をとる。

なお，条件 $6-Y-Z<0$ は満たされている。

(i)～(iii)より，F は最大値 35 をとり，このとき $(X,\ Y,\ Z)$ は，

$$(X,\ Y,\ Z)=(6,\ 1,\ 1),\ (1,\ 6,\ 1),\ (1,\ 1,\ 6)$$

以上より，S のとり得る最小値 m は，$m=9\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 35=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

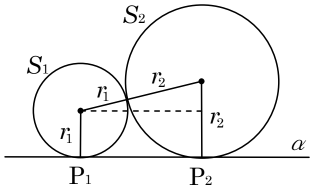
そして，$S=m$ となる確率は，$\dfrac{3}{6^3}=\dfrac{1}{72}$ である。

［解　説］

確率の問題ですが，それを計算するまでのプロセスに一癖ある 3 つの設問で構成されています。(1)は，図形的に考えれば結論はほぼ確定ですが，それを示すのに初め辺の長さに着目したものの複雑になり，角に変更というわけです。(2)も(1)と同様な印象です。また，(3)は独立な 3 変数がからむ最大・最小問題で，基本に従って処理していますが，かなり記述量が多くなりました。

3

問題のページへ

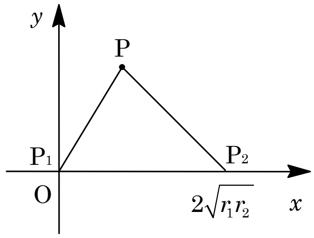


(1) 球 S_1，S_2 と平面 α の接点 P_1，P_2 を含み，α に垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$P_1P_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2) S_1 と S_2 の両方に外接している球 S について，半径を r，平面 α との接点を P とする。

ここで，α 上に座標系を設定して，P_1 を原点とし，P_2 を x 軸の正の部分にとると，(1)から $P_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$ となる。そして，$P(x,\ y)$ とおく。



すると，(1)の結論から，$P_1P=2\sqrt{r_1r}$，$P_2P=2\sqrt{r_2r}$ となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$ となり，r を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i) $r_1=r_2$ のとき

③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$ となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分 P_1P_2 の垂直二等分線上にある。

(ii) $r_1\neq r_2$ のとき

③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$ となり，

$$\Big(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\Big)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \Big(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\Big)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心 $\Big(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\Big)$，半径 $\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$ の円上にある。

［解　説］

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点 P_1，P_2 からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，$\cdots$，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2)　素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i)　$n=pq$ (p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$)のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii)　$n=r^2$ (r は 3 以上の素数)のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

［解 説］

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$C: x = 3\cos t - \cos 3t$，$y = 3\sin t - \sin 3t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t \sin t$$

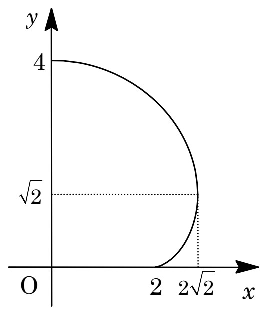
すると，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，x と y の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$		$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

また，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6\sin 2t \sin t}{6\cos 2t \sin t} = \tan 2t$ から，

$$\lim_{t \to +0} \frac{dy}{dx} = 0,\quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{dy}{dx} = 0$$

以上より，曲線 C の概形は右図のようになる。



(2)　曲線 C の $0 \leqq y \leqq \sqrt{2}$ の部分を $y = y_1$，$\sqrt{2} \leqq y \leqq 4$ の部分を $y = y_2$ とおき，$x = f(t)$，$y = g(t)$ とする。

C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} y_2\,dx - \int_2^{2\sqrt{2}} y_1\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} g(t)f'(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t)f'(t)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin t - \sin 3t)(-3\sin t + 3\sin 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2 t - 4\sin 3t \sin t + \sin^2 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3(1-\cos 2t)}{2} + 2(\cos 4t - \cos 2t) + \frac{1-\cos 6t}{2}\right\}dt$$

$$= 3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$$

［解　説］

パラメータ曲線についての頻出問題です。なお，(2)は y 軸方向に積分しても構いません。