1

解答解説のページへ

次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(i)　N の正の約数は 12 個。

(ii)　N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12。

ただし，N の約数には 1 と N も含める。

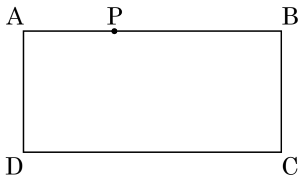
$\boxed{2}$

解答解説のページへ

実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ



a を 1 以上の実数とする。図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている。ただし $\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{AB}=a$ である。P を辺 AB 上の点とし，$\mathrm{AP}=x$ とする。頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を 1 回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする。

(1) S を a と x で表せ。

(2) $a=1$ とする。P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお，配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない）

4

解答解説のページへ

n は正の整数とし，文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。A_n の要素に対し次の条件(＊)を考える。

(＊)　文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を 1 つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1)　A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが条件(＊)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ とする。A_n から要素を 1 つ選んだところ，これは条件(＊)を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限値 $\lim_{n \to \infty} Q(n)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$, $f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また, 複素数平面内の単位円周から 2 点1, -1 を除いたものを T とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば, $F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1 , c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

1

問題のページへ

まず，条件(ii)から，$12=2^2\cdot 3$ が N の正の約数より，N を素因数分解すると，

$$N=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f\cdot 17^g\cdot 19^h\cdots\cdots$$

ただし，a は 2 以上，b は 1 以上，$c, d, e, f, g, h, \cdots$ は 0 以上の整数である。

次に，条件(i)より，N の正の約数は 12 個なので，$c, d, e, f, g, h, \cdots$ の値はすべて 0，またはいずれかのみ 1 で他は 0 である。

さらに，条件(ii)から，N は正の約数 1, 2, 3, 4, 6, 12 をもち，12 が小さい方から並べて 7 番目になることから，N の 11 以下の正の約数が 1, 2, 3, 4, 6 以外にもう 1 つだけある。これより，$f=g=h=\cdots=0$ となる。以下，$(a,\ b)$ の値で場合分けをする。

(a)　$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき

$12=(2+1)\times(1+1)\times(1+1)$ より，$c=1$ または $d=1$ または $e=1$ である。

(a-i)　$(c,\ d,\ e)=(1,\ 0,\ 0)$ のときは，$N=2^2\cdot 3\cdot 5=60$ となるが，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 5 と 10 があり，不適である。

(a-ii)　$(c,\ d,\ e)=(0,\ 1,\ 0)$ のときは，$N=2^2\cdot 3\cdot 7=84$ となり，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 7 だけなので，適する。

(a-iii)　$(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 1)$ のときは，$N=2^2\cdot 3\cdot 11=132$ となり，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 11 だけなので，適する。

(b)　$(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき

$12=(2+1)\times(3+1)$ より，$(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

このとき，$N=2^2\cdot 3^3=108$ となり，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 9 だけなので，適する。

(c)　$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のとき

$12=(3+1)\times(2+1)$ より，$(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

このとき，$N=2^3\cdot 3^2=72$ となるが，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 8 と 9 があり，不適である。

(d)　$(a,\ b)=(5,\ 1)$ のとき

$12=(5+1)\times(1+1)$ より，$(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

このとき，$N=2^5\cdot 3=96$ となり，1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 8 だけなので，適する。

(a)～(d)より，求める N は，$N=84,\ 96,\ 108,\ 132$ である。

［解 説］

約数を題材とした整数問題ですが，かなり面倒です。「11 以下の正の約数が 1, 2, 3, 4, 6 以外にもう 1 つだけ」ということに着目しています。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

まず，$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ に対して，$u=t-\pi$ とおくと，

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}du$$
$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}du=f(x)$$

これより，$f(x)$ は周期 π の周期関数なので，以下，$0\leqq x\leqq\pi$ で考えて，

$$f'(x)=\frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}=\frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}$$
$$=\frac{|\cos x|(1+\sin^2 x)-|\sin x|(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

ここで，$g(x)=|\cos x|(1+\sin^2 x)-|\sin x|(1+\cos^2 x)$ とおくと，

(i)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$g(x)=\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)$$
$$=\cos x-\sin x+\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$$
$$=(\sin x-\cos x)(\sin\cos x-1)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(\sin 2x-2)$$

すると，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致するので，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$g(x)=-\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)$$
$$=-\sin x-\cos x-\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$
$$=-(\sin x+\cos x)(\sin\cos x+1)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sin 2x+2)$$

すると，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致するので，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続で $f(0)=f(\pi)$ より，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，最小値は $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ となる。

さて，$F(t)=\displaystyle\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ とおくと，

$$F(t)=\int\frac{\sin t}{2-\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin t}{(\sqrt{2}+\cos t)(\sqrt{2}-\cos t)}dt$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\cos t}\right)\sin t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\{-\log(\sqrt{2}-\cos t)+\log(\sqrt{2}+\cos t)\}+C$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}+C$$

すると，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt=F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 9=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$
$$=F(\pi)-F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{5}{4}\pi\right)+F(\pi)=2F(\pi)-F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，$f(x)$の最大値は$\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$，最小値は$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$である。

［解　説］

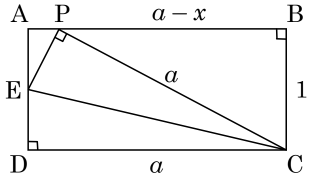
定積分の計算問題ですが，周期性を見つけるのが，最初のポイントです。ただ，その後，すさまじい計算が待ち受けています。

3

問題のページへ

(1)　長方形 ABCD に対して，折り目である線分 PD の垂直二等分線と辺 AD または AB との交点を E，辺 BC または CD との交点を F とおく。

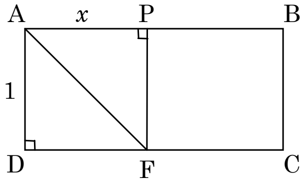
ここで，点 F が頂点 C に一致するとき，△PBC において，$(a-x)^2+1^2=a^2$ から，



$$-2ax+x^2+1=0,\ x^2-2ax+1=0$$

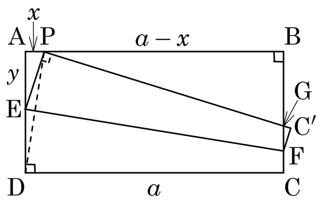
$0<x<a$ より，$x=a-\sqrt{a^2-1}$

また，点 E が頂点 A に一致するとき，右図より，$x=1$ である。



これより，折り返した図形が長方形 ABCD からはみ出る部分の面積について，x の範囲を，$0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$，$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$，$1<x\leqq a$ の場合に分けて考える。

(i)　$0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$ のとき



$x>0$ のとき，AE$=y$ とおくと，△AEP において，

$$x^2+y^2=(1-y)^2,\ y=\frac{1-x^2}{2}$$

ここで，△AEP と△BPG は相似なので，

$$\mathrm{PG}=(a-x)\frac{1-y}{y}=(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$\mathrm{GC'}=a-(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{a-ax^2-(a+ax^2-x-x^3)}{1-x^2}=\frac{x^3-2ax^2+x}{1-x^2}$$

さらに，△AEP と△C′FG は相似なので，はみ出る部分△C′FG の面積 S は，

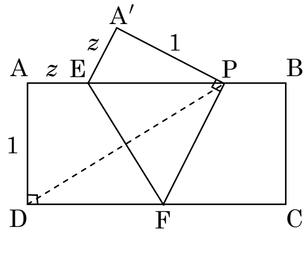
$$S=\frac{1}{2}xy\cdot\left(\frac{\mathrm{GC'}}{\mathrm{PA}}\right)^2=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1-x^2}{2}\left\{\frac{x^3-2ax^2+x}{x(1-x^2)}\right\}^2=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}$$

なお，この式は $x=0$ のときも成立する。

(ii)　$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$ のとき

長方形 ABCD からはみ出る部分はないので，$S=0$ である。

(iii)　$1<x\leqq a$ のとき



AE$=z$ とおくと，△A′EP において，

$$z^2+1^2=(x-z)^2,\ z=\frac{x^2-1}{2x}$$

はみ出る部分△A′EP の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}z\cdot 1=\frac{x^2-1}{4x}$$

(2)　$a=1$ のとき，S が最大となるのは，(1)の(i)の場合なので，$0\leqq x<1$ で，

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(x-1)^4}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}$$

$$S'=\frac{\{(1-x)^3-3x(1-x)^2\}(1+x)-x(1-x)^3}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{-(1-x)^2(3x^2+4x-1)}{4(1+x)^2}$$

すると，S の増減は右表のようになり，$x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ のとき S は最大になる。

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

［解 説］

モデルを作る白紙が提供されたため，見当をつけるのは容易ですが，数式処理は予想以上に面倒なものでした。なお，本問に既視感を覚えたので，調べたところ 2001 年の第 4 問でした。こちらは，二重になる部分でしたが。

4　　問題のページへ

(1)　文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列の集合 A_n の要素は 3^n 個あり，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。このとき，文字 c が 2 つ以上連続して現れない場合(＊)を考える。

そこで，(＊)を満たし，k 番目の文字が a, b, c である並べ方を，それぞれ a_k，b_k，c_k 通りとすると，

$$a_{k+1}=a_k+b_k+c_k,\quad b_{k+1}=a_k+b_k+c_k,\quad c_{k+1}=a_k+b_k$$

ここで，$d_k=a_k+b_k$ とおくと，$d_1=2$，$c_1=1$ として，

$$d_{k+1}=2d_k+2c_k\ \cdots\cdots\cdots①,\quad c_{k+1}=d_k\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$d_{k+1}=2d_k+2d_{k-1}\ \ (k\geqq 2)\cdots\cdots\cdots③$

そこで，2 次方程式 $x^2=2x+2$ を対応させ，その解を $x=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=1-\sqrt{3},\quad \beta=1+\sqrt{3}$$

さて，③を変形すると，$d_{k+1}-\alpha d_k=\beta(d_k-\alpha d_{k-1})$ となり，$d_2=4+2=6$ から，

$$d_{k+1}-\alpha d_k=(d_2-\alpha d_1)\beta^{k-1}=\{6-2(1-\sqrt{3})\}\beta^{k-1}=(4+2\sqrt{3})\beta^{k-1}=\beta^{k+1}$$

同様に，③を変形すると，$d_{k+1}-\beta d_k=\alpha(d_k-\beta d_{k-1})$ となり，

$$d_{k+1}-\beta d_k=(d_2-\beta d_1)\alpha^{k-1}=\{6-2(1+\sqrt{3})\}\alpha^{k-1}=(4-2\sqrt{3})\alpha^{k-1}=\alpha^{k+1}$$

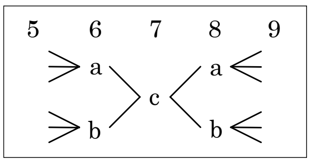
よって，$(-\alpha+\beta)d_k=\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}$ となり，$d_k=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^{k+1}-\alpha^{k+1})$

⑤より，$c_k=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^k-\alpha^k)\ (k\geqq 2)$ となり，この式は $k=1$ のときも成立する。

以上より，A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが(＊)を満たす確率 $P(n)$ は，

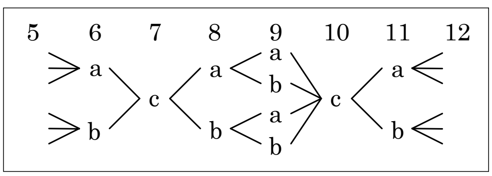
$$\begin{aligned}P(n)&=\frac{d_n+c_n}{3^n}=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}+\beta^n-\alpha^n)\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\{\beta^n(\beta+1)-\alpha^n(\alpha+1)\}\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\{(2+\sqrt{3})\beta^n-(2-\sqrt{3})\alpha^n\}=\frac{1}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2})\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}\{(1+\sqrt{3})^{n+2}-(1-\sqrt{3})^{n+2}\}\end{aligned}$$

(2)　$n\geqq 12$ のとき，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目の文字が c である確率を p_X とおくと，



$$p_X=\frac{(d_5+c_5)\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot(d_{n-8}+c_{n-8})}{3^n}$$

同様に，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目と 10 番目の文字が c である確率を p_Y とおくと，



$$p_Y=\frac{(d_5+c_5)\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot (d_{n-11}+c_{n-11})}{3^n}$$

これより，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目の文字が c であったとき，10 番目の文字が c である確率 $Q(n)$ は,

$$Q(n)=\frac{p_Y}{p_X}=\frac{2^4(d_5+c_5)(d_{n-11}+c_{n-11})}{2^2(d_5+c_5)(d_{n-8}+c_{n-8})}=\frac{4\{(1+\sqrt{3})^{n-9}-(1-\sqrt{3})^{n-9}\}}{(1+\sqrt{3})^{n-6}-(1-\sqrt{3})^{n-6}}$$

$$=4\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n-9}}{(1+\sqrt{3})^3-(1-\sqrt{3})^3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n-9}}$$

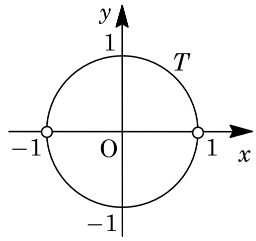
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)=\frac{4}{(1+\sqrt{3})^3}=\frac{2}{5+3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$ となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。加えて極限の味付けもあり，量的にかなりのものとなっています。なお，解答例は最初に考えたもので記しましたが，いきなり①と②から始めると，少し簡素になります。

5

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は，2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。

そこで，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2)　$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ (a, b は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は，(1)(2)から，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\cdots①,\quad c_1c_2+2=b\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0\cdots\cdots③$ の 2 つの解となる。

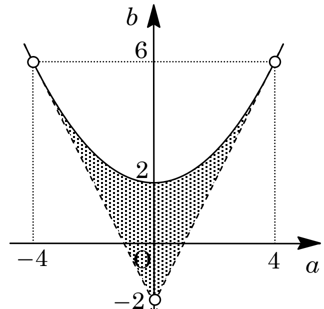
ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は，

$$-\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0\cdots\cdots④,\quad -2<\frac{a}{2}<2\cdots\cdots⑤,\quad g(-2)=2+2a+b>0\cdots\cdots⑥$$
$$g(2)=2-2a+b>0\cdots\cdots⑦$$

④～⑦をまとめると，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$$b>-2a-2,\quad b>2a-2$$

点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



［解　説］

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。