1

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく。a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。

2

解答解説のページへ

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする。

$$f'(t)=-f(t)g(t),\ \ g'(t)=\{f(t)\}^2$$
$$f(t)>0,\ \ |g(t)|<1,\ \ f(0)=1,\ \ g(0)=0$$

このとき，$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}$ とおく。

(1)　$p'(t)$ を求めよ。

(2)　$q'(t)$ は定数関数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)$ を求めよ。

(4)　$f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))\ (0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(-a,\ 0)$ (ただし $0<a<b$) をとる。点 A, B を通る直線を l とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする。さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を A_1 とする。以下，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を A_{n+1} とする。

(1)　点 A_n，C_n の座標を求めよ。

(2)　$\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を正の整数とし，C_1，…，C_n を n 枚の硬貨とする。各 $k=1$，…，n に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1-p_k$ とする。この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える。

(1)　$p_k=\dfrac{1}{3}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ。

(2)　$p_k=\dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ。

(3)　$n=3m$ (m は正の整数) で，$k=1$，…，$3m$ に対して，

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{1}{3m} & (k=1,\ \cdots,\ m)\\ \dfrac{2}{3m} & (k=m+1,\ \cdots,\ 2m)\\ \dfrac{1}{m} & (k=2m+1,\ \cdots,\ 3m)\end{cases}$$

とする。このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\lim\limits_{m\to\infty}Z_{3m}$ を求めよ。

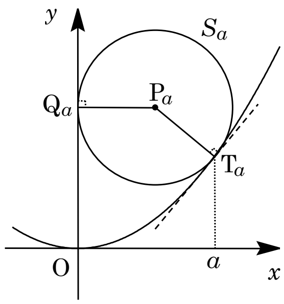
5

解答解説のページへ

整数の組$(a,\ b)$に対して 2 次式$f(x)=x^2+ax+b$を考える。方程式$f(x)=0$の複素数の範囲のすべての解αに対して$\alpha^n=1$となる正の整数 n が存在するような組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$a>0$ のとき，点 $T_a\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ で曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ ……①に接し，点 Q_a で y 軸の正の部分にも接する円 S_a について，その中心を $P_a(x,\ y)$，半径を r_a とおく。

①から $y'=x$ なので，T_a における接線の方向ベクトルの成分は $(1,\ a)$ と表せ，これより接線の法線ベクトルの成分を $(-a,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{OP_a}=\overrightarrow{OT_a}+\overrightarrow{T_aP_a}$ から，

$$(x,\ y)=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+r_a\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a,\ 1)$$

ここで，$x=r_a$ から $a-\frac{ar_a}{\sqrt{a^2+1}}=r_a$ となり，$(\sqrt{a^2+1}+a)r_a=a\sqrt{a^2+1}$ から，

$$r_a=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+a}=a\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)$$

よって，$x=a\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)=a^3+a-a^2\sqrt{a^2+1}$ ………②

$$y=\frac{1}{2}a^2+\frac{r_a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}a^2+a\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)=a\sqrt{a^2+1}-\frac{1}{2}a^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③から，$a=1$ のとき，$x=2-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ となり，S_1 の中心 P の座標は $P\left(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ である。

(2)　点 P_a の軌跡 C は，②③で表され，

$$\frac{dx}{da}=3a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}-\frac{a^3}{\sqrt{a^2+1}},\quad \frac{dy}{da}=\sqrt{a^2+1}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}-a$$

$a=1$ のとき，$\frac{dx}{da}=4-2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=4-\frac{5}{2}\sqrt{2}$，$\frac{dy}{da}=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$

すると，点 P における曲線 C の接線の傾きは，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}-1}{4-\frac{5}{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{8-5\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{2}-2)(8+5\sqrt{2})}{64-50}=\frac{14+14\sqrt{2}}{14}=1+\sqrt{2}$$

［解　説］

軌跡を題材にした微分の応用問題です。(1)は単位ベクトルを利用して P_a の座標を求めています。なお，(1)で一般的に解いたのは(2)の設問のためです。

2

問題のページへ

(1) $p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ に対して，$f'(t)=-f(t)g(t)$，$g'(t)=\{f(t)\}^2$ から，

$$p'(t)=2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t)=-2\{f(t)\}^2g(t)+2g(t)\{f(t)\}^2=0$$

(2) $|g(t)|<1$ より，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=\log\{1+g(t)\}-\log\{1-g(t)\}$ となり，

$$q'(t)=\frac{g'(t)}{1+g(t)}-\frac{-g'(t)}{1-g(t)}=\frac{g'(t)\{1-g(t)+1+g(t)\}}{1-\{g(t)\}^2}=\frac{2g'(t)}{1-\{g(t)\}^2}$$

ここで，C_1 を定数とすると，(1)より $p(t)=C_1$ となり，$f(0)=1$，$g(0)=0$ から，

$$p(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$$

これより $C_1=1$ となり，$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=1$，また $g'(t)=\{f(t)\}^2$ から，

$$q'(t)=\frac{2\{f(t)\}^2}{\{f(t)\}^2}=2$$

(3) C_2 を定数とすると，(2)より $q(t)=2t+C_2$ となり，$g(0)=0$ から，

$$q(0)=\log\frac{1+g(0)}{1-g(0)}=\log\frac{1}{1}=0$$

これより $C_2=0$ となり，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=2t$，すなわち $\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=e^{2t}$ であり，

$$1+g(t)=e^{2t}\{1-g(t)\},\ (e^{2t}+1)g(t)=e^{2t}-1$$

よって，$g(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=\dfrac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\frac{1}{1}=1$ である。

(4) $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ で表される曲線に対し，$0\leqq t\leqq T$ の長さを L とすると，

$$\begin{aligned}\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2&=\{-f(t)g(t)\}^2+\{f(t)\}^4=\{f(t)\}^2[\{g(t)\}^2+\{f(t)\}^2]\\&=\{f(t)\}^2p(t)=\{f(t)\}^2=1-\{g(t)\}^2\\&=1-\frac{(e^{2t}-1)^2}{(e^{2t}+1)^2}=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\end{aligned}$$

これより，$L=\displaystyle\int_0^T\sqrt{\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}}\,dt=2\int_0^T\frac{e^t}{e^{2t}+1}dt$

ここで，$u=e^t$ とおくと $du=e^tdt$ となり，$t=0\to T$ は $u=1\to e^T$ に対応し，

$$L=2\int_1^{e^T}\frac{1}{u^2+1}du\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$f(T)=g(T)\ (T>0)$ と $p(T)=\{f(T)\}^2+\{g(T)\}^2=1$ から，

$$2\{g(T)\}^2=1$$

$f(T)>0$ から $g(T)>0$ なので，$g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$\dfrac{e^{2T}-1}{e^{2T}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\sqrt{2}(e^{2T}-1)=e^{2T}+1,\ (\sqrt{2}-1)e^{2T}=\sqrt{2}+1$$

すると，$e^{2T}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ より，$e^T=\sqrt{2}+1$ である。

よって，①より，$L=2\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{1}{u^2+1}du$ ………②

さらに，$u=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと$du=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$となり，$\tan\alpha=\sqrt{2}+1$とすると，$u=1\to\sqrt{2}+1$は$\theta=\dfrac{\pi}{4}\to\alpha$に対応する。

ここで，$\tan^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$から，

$$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$$

これより，$\alpha=\dfrac{3}{8}\pi$なので，②から，

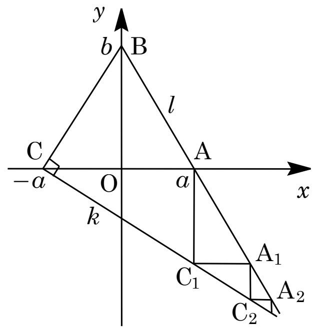
$$L=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

［解　説］

連立タイプの微分方程式の問題です。与えられた誘導から，$p(t)\to q(t)\to g(t)$と決定していきます。これらの結果をもとに，(4)の曲線の長さにつないでいくわけですが，上記のαの値を求めるところで，少し止まってしまいます。

3

問題のページへ



(1)　$0<a<b$ のとき，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ に対し，2 点 A, B を通る直線 l の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$ ………①

点 $\mathrm{C}(-a,\ 0)$ に対し，線分 BC の傾きは $\dfrac{b}{a}$ から，線分 BC に垂直で点 C を通る直線 k の方程式は，

$$y=-\frac{a}{b}(x+a)=-\frac{a}{b}x-\frac{a^2}{b}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 l 上の点 A_n の x 座標を $x=p_n$ とおくと，$\mathrm{A}_n\left(p_n,\ -\dfrac{b}{a}p_n+b\right)$ となり，この A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1} とすると，$\mathrm{C}_{n+1}\left(p_n,\ -\dfrac{a}{b}p_n-\dfrac{a^2}{b}\right)$ である。

さらに，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を A_{n+1} とすると，$\mathrm{A}_{n+1}\left(p_{n+1},\ -\dfrac{a}{b}p_n-\dfrac{a^2}{b}\right)$ となり，①に代入して，

$$-\frac{a}{b}p_n-\frac{a^2}{b}=-\frac{b}{a}p_{n+1}+b,\quad \frac{b}{a}p_{n+1}=\frac{a}{b}p_n+\frac{a^2+b^2}{b}$$

まとめると，$p_{n+1}=\dfrac{a^2}{b^2}p_n+\dfrac{a(a^2+b^2)}{b^2}$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}=\frac{a^2}{b^2}\left\{p_n-\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\right\}$$

そして，$p_0=a$ とすると，$n\geqq 0$ で成り立ち，

$$p_n-\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}=\left\{p_0-\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\right\}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n=\left\{a-\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\right\}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n$$
$$=\frac{-2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n=-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$

これより，$p_n=-\dfrac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}+\dfrac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}$ となり，点 A_n の y 座標は，

$$-\frac{b}{a}p_n+b=-\frac{b}{a}\left\{-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\right\}+b$$
$$=\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-\frac{b(a^2+b^2)}{b^2-a^2}+b=\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}$$

よって，$\mathrm{A}_n\left(-\dfrac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}+\dfrac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2},\ \dfrac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}-\dfrac{2a^2b}{b^2-a^2}\right)$

また，点 C_n の x 座標は点 A_{n-1} の x 座標に等しく，点 C_n の y 座標は点 A_n の y 座標に等しいことより，

$$\mathrm{C}_n\left(-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-2}+\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2},\ \frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\right)$$

(2)　$\triangle\mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n は，$\mathrm{AC}=2a$ から，

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2a\left\{b-\left(-\frac{b}{a}p_n+b\right)\right\}=bp_n=-\frac{2a^3b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+\frac{ab(a^2+b^2)}{b^2-a^2}$$

(3)　直線 BC と直線 BA は y 軸対称なので，

$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{p_n}{a}=-\frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$$

ここで，$0<a<b$ から $0<\dfrac{a}{b}<1$ であるので，$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$$

［解 説］

図形と数列の問題です。質と量ともにハードな計算で，注意深さが要求されます。なお，(2)と(3)は付録のような設問です。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

n 枚の硬貨 C_1, $\cdots$, C_n を投げ，C_k $(1 \leqq k \leqq n)$ が表の確率を p_k，裏の確率を $1-p_k$ とする。ゲームに成功するには，$C_1 \sim C_n$ の表が奇数枚という条件から，$n \geqq 2$ で，「$C_1 \sim C_{n-1}$ は表が奇数枚で C_n は裏」，「$C_1 \sim C_{n-1}$ は表が偶数枚で C_n は表」のいずれかである。

(1)　$p_k = \dfrac{1}{3}$ のとき，ゲームに成功する確率 X_n について，

$$X_n = X_{n-1}(1-p_n) + (1-X_{n-1})p_n = (1-2p_n)X_{n-1} + p_n$$

すると，$X_n = \left(1-\dfrac{2}{3}\right)X_{n-1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}X_{n-1} + \dfrac{1}{3}$ となり，

$$X_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(X_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$p_1 = \dfrac{1}{3}$ から $X_1 = \dfrac{1}{3}$ なので，$X_n - \dfrac{1}{2} = \left(X_1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

$X_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$　（$n=1$ のときも成り立っている）

(2)　$p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ のとき，ゲームに成功する確率 Y_n について，(1)と同様に，

$$Y_n = (1-2p_n)Y_{n-1} + p_n$$

すると，$Y_n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)Y_{n-1} + \dfrac{1}{2(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}Y_{n-1} + \dfrac{1}{2(n+1)}$ となり，

$$(n+1)Y_n = nY_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$p_1 = \dfrac{1}{4}$ から $Y_1 = \dfrac{1}{4}$ なので，$(n+1)Y_n = 2Y_1 + \dfrac{1}{2}(n-1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(n-1) = \dfrac{1}{2}n$

$Y_n = \dfrac{n}{2(n+1)}$　（$n=1$ のときも成り立っている）

(3)　p_k の値が，$p_k = \dfrac{1}{3m}$ $(k=1,\ \cdots,\ m)$，$p_k = \dfrac{2}{3m}$ $(k=m+1,\ \cdots,\ 2m)$，$p_k = \dfrac{1}{m}$ $(k=2m+1,\ \cdots,\ 3m)$ のとき，ゲームに成功する確率 Z_n について，(1)と同様に，

(i)　$2 \leqq n \leqq m$ のとき

$$Z_n = (1-2p_n)Z_{n-1} + p_n = \left(1-\frac{2}{3m}\right)Z_{n-1} + \frac{1}{3m} = \frac{3m-2}{3m}Z_{n-1} + \frac{1}{3m}$$

$Z_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3m-2}{3m}\left(Z_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right)$ と変形し，$p_1 = \dfrac{1}{3m}$ から $Z_1 = \dfrac{1}{3m}$ なので，

$$Z_m - \frac{1}{2} = \left(Z_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3m-2}{3m}\right)^{m-1} = \left(\frac{1}{3m} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3m-2}{3m}\right)^{m-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3m-2}{3m}\right)^{m} \cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$m+1 \leqq n \leqq 2m$ のとき

$$Z_n = (1-2p_n)Z_{n-1} + p_n = \left(1-\frac{4}{3m}\right)Z_{n-1} + \frac{2}{3m} = \frac{3m-4}{3m}Z_{n-1} + \frac{2}{3m}$$

$Z_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3m-4}{3m}\left(Z_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right)$ と変形し，①を用いると，

$$Z_{2m}-\frac{1}{2}=\left(Z_m-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3m-4}{3m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(\frac{3m-2}{3m}\right)^m\left(\frac{3m-4}{3m}\right)^m\cdots\cdots\cdots②$$

(iii) $2m+1\leqq n\leqq 3m$ のとき

$$Z_n=(1-2p_n)Z_{n-1}+p_n=\left(1-\frac{2}{m}\right)Z_{n-1}+\frac{1}{m}=\frac{m-2}{m}Z_{n-1}+\frac{1}{m}$$

$Z_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{m-2}{m}\left(Z_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$ と変形し，②を用いると，

$$Z_{3m}-\frac{1}{2}=\left(Z_{2m}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(\frac{3m-2}{3m}\right)^m\left(\frac{3m-4}{3m}\right)^m\left(\frac{m-2}{m}\right)^m$$

(i)～(iii)より，$Z_{3m}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3m-2}{3m}\right)^m\left(\dfrac{3m-4}{3m}\right)^m\left(\dfrac{m-2}{m}\right)^m$

さて，$m\to\infty$ のとき，$\left(\dfrac{3m-2}{3m}\right)^m=\left(1-\dfrac{2}{3m}\right)^m=\left\{\left(1-\dfrac{2}{3m}\right)^{-\frac{3m}{2}}\right\}^{-\frac{2}{3}}\to e^{-\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{3m-4}{3m}\right)^m=\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m=\left\{\left(1-\frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3m}{4}}\right\}^{-\frac{4}{3}}\to e^{-\frac{4}{3}}$$

$$\left(\frac{m-2}{m}\right)^m=\left(1-\frac{2}{m}\right)^m=\left\{\left(1-\frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}}\right\}^{-2}\to e^{-2}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}Z_{3m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{4}{3}}e^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}$ となる。

［解　説］

確率と漸化式に極限を絡めた難度の高い問題です。(1)は二項定理を利用すると，X_n が直接的に求まりますが，(2)と(3)の設問を見て暗雲が漂ったため方針を転換しました。(3)は(1)と同様にして，$Z_m\to Z_{2m}\to Z_{3m}$ と求めています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, bは整数) に対し，方程式$f(x)=0$のすべての解αについて，ある正の整数nで$\alpha^n=1$より，$|\alpha^n|=1$から$|\alpha|^n=1$となり，$|\alpha|=1$である。

(i)　異なる2実数解$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$をもつとき

$|\alpha|=|\beta|=1$より$\alpha=\pm1$，$\beta=\pm1$で，$\alpha<\beta$から$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$である。

このとき$\alpha^2=1$，$\beta^2=1$となり，$f(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$から，

$(a,\ b)=(0,\ -1)$

(ii)　重解$x=\alpha$をもつとき

$|\alpha|=1$より$\alpha=\pm1$である。このとき$\alpha^2=1$となる。

すると，$f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$または$f(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$より，

$(a,\ b)=(-2,\ 1)$，$(2,\ 1)$

(iii) 異なる2虚数解$x=\alpha$，$\overline{\alpha}$をもつとき

$|\alpha|=|\overline{\alpha}|=1$より，$0<\theta<\pi$として，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$

すると，$a=-(\alpha+\overline{\alpha})=-2\cos\theta$，$b=\alpha\overline{\alpha}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$となる。

ここで，$-2<-2\cos\theta<2$から，整数aの値は$a=-1$，0，1となり，

・$a=-1$のとき　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$から$\theta=\dfrac{\pi}{3}$となり，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$\alpha^6=1$，$(\overline{\alpha})^6=1$

・$a=0$のとき　$\cos\theta=0$から$\theta=\dfrac{\pi}{2}$となり，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha^4=1$，$(\overline{\alpha})^4=1$

・$a=1$のとき　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$から$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$となり，$\alpha=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\alpha^3=1$，$(\overline{\alpha})^3=1$

よって，$(a,\ b)=(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$

(i)～(iii)より，$(a,\ b)=(-2,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(0,\ -1)$

［解 説］

複素数と方程式の問題です。実数解と虚数解に分けて処理をしていますが，いずれの場合も解の絶対値は1です。