$\boxed{1}$

解答解説のページへ

正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ。

2

解答解説のページへ

斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり, 底面を正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$, 頂点を O と表せば $\mathrm{OA}_1=\mathrm{OA}_2=\cdots=\mathrm{OA}_n=1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

3 辺の長さが 1, 1, a である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。

5

解答解説のページへ

複素平面上の点列 A_n $(n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$ (a_n, b_n は実数, i は虚数単位)を表すとする。極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき, 複素数 $a_\infty + ib_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の点列 P_n $(n \geqq 0)$ を次のように定める。P_0 は 0 を表す点とし, P_1 は $1+i$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し, 長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n \geqq 0)$ は次のように定める。Q_0 は 0 を表す点とし, Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し, 長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。

1

問題のページへ

$A=(a+b)^p$，$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$に対して，$\dfrac{b}{a}=x$とおくと，$x>0$として，

$$A=a^p(1+x)^p,\ \ B=2^{p-1}(a^p+a^px^p)=a^p\cdot 2^{p-1}(1+x^p)$$

すると，$A-B=a^p\left\{(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)\right\}$

ここで，$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$とおくと，

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}\cdot px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$$

(i)　$p-1>0$　($p>1$)のとき

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \Leftrightarrow 1+x>2x \Leftrightarrow 0<x<1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \Leftrightarrow 1+x<2x \Leftrightarrow 1<x$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

$f(x)\leqq 0$

よって，$A\leqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

(ii)　$p-1=0$　($p=1$)のとき

$f(x)=(1+x)-2^0(1+x)=0$より，$A=B$

(iii)　$p-1<0$　($0<p<1$)のとき

$f'(x)>0 \Leftrightarrow (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \Leftrightarrow 1+x<2x \Leftrightarrow 1<x$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \Leftrightarrow 1+x>2x \Leftrightarrow 0<x<1$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)\geqq 0$

よって，$A\geqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

(i)(ii)(iii)をまとめて，

$p>1$かつ$a\neq b$のとき$A<B$，また$0<p<1$かつ$a\neq b$のとき$A>B$，さらにこれらの場合以外の$p=1$または$a=b$のとき$A=B$

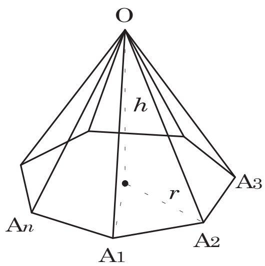
［解 説］

AもBもaとbについてのp次式で，しかも定数項が0なので，aとbの比を考えて文字を減らしました。この常套手段で結論が導けます。

2

問題のページへ

(1)　底面の正 n 角形の面積を S, 外接円の半径を r とし, 正 n 角錐の高さを h とすると, 条件より,



$r^2+h^2=1$ ………①

$S=\left(\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)\times n=\dfrac{nr^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ ………②

よって, 正 n 角錐の体積を V とすると, ①②より,

$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{6}nr^2h\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{1}{6}n(1-h^2)h\sin\dfrac{2\pi}{n}$

$f(h)=(1-h^2)h$ とおくと, ①より,

$0<h<1$ で, $f'(h)=1-3h^2$

h	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より, $h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $f(h)$ は最大値

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

よって, V の最大値 V_n は, $V_n=\dfrac{1}{6}n\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}n\sin\dfrac{2\pi}{n}$

(2)　(1)より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

［解　説］

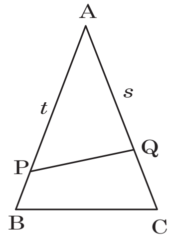
本問のような問題が出されたのは, あっさり解ける問題も必要ということでしょうか。そのためか, 今年は出題数が 1 つ増加しました。

3

問題のページへ

$AB=AC=1$，$BC=a$とすると，三角形の形成条件より$0<a<2$となる。

(i)　線分の両端がともに等辺上にあるとき



右図のように2点P, Qを設定し，$AP=t$，$AQ=s$ ($0<t\leqq 1$，$0<s\leqq 1$)として，$\triangle ABC=2\triangle APQ$のときを考える。

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin A=2\cdot\frac{1}{2}ts\sin A,\ 2ts=1\cdots\cdots\cdots①$$

余弦定理より，$\cos A=\dfrac{1+1-a^2}{2\cdot 1\cdot 1}=1-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots②$

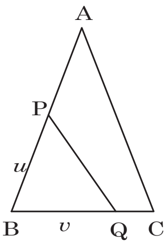
①②より，$PQ^2=t^2+s^2-2ts\cos A=t^2+\dfrac{1}{4t^2}-1+\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$t^2+\dfrac{1}{4t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{4t^2}}=1$

等号は$t^2=\dfrac{1}{4t^2}$のとき成立し，$0<t\leqq 1$を満たすのは$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のときとなる。このとき①より，$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となり，$0<s\leqq 1$を満たす。

以上より，PQ^2の最小値m_1は③より，$m_1=1-1+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

(ii)　線分の両端が一方は等辺上で他方は底辺上にあるとき



右図のように2点P, Qを設定し，$BP=u$，$BQ=v$ ($0<u\leqq 1$，$0<v\leqq a$)として，$\triangle BAC=2\triangle BPQ$のときだけを考えても一般性は失われない。

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\cdot \sin B=2\cdot\frac{1}{2}uv\sin B,\ 2uv=a\cdots\cdots\cdots④$$

このとき，$\cos B=\dfrac{BC}{2AB}=\dfrac{a}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$PQ^2=u^2+v^2-2uv\cos B=u^2+\dfrac{a^2}{4u^2}-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，$0<v\leqq a$なので④から$0<\dfrac{a}{2u}\leqq a$，すなわち$\dfrac{1}{2}\leqq u$となり，$0<u\leqq 1$と合わせて$\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 1$となる。

さて，$u^2=x$とおき，$f(x)=x+\dfrac{a^2}{4x}$を考える。

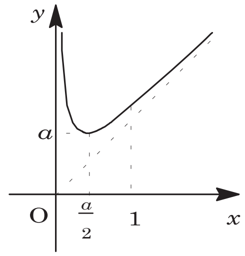
$$f'(x)=1-\frac{a^2}{4x^2}=\frac{(2x-a)(2x+a)}{4x^2}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	a	↗

$\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 1$より，$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 1$

また, $0<a<2$から，$0<\dfrac{a}{2}<1$

(ii-i)　$\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{a}{2}$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq a < 2\right)$のとき



$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = a$

このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

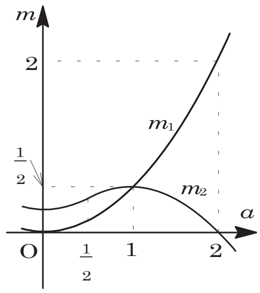
$$m_2 = a - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}$$

(ii-ii)　$\dfrac{a}{2} < \dfrac{1}{4}$ $\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$のとき

$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4} + a^2$

このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

$$m_2 = \frac{1}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}$$



(i)(ii)をまとめて, aとPQ^2の最小値mとの関係をグラフにすると，右図のようになる。

これより，$0 < a < 1$のとき$m = m_1 = \dfrac{a^2}{2}$，$1 \leqq a < 2$のとき$m = m_2 = a - \dfrac{a^2}{2}$

よって, PQの最小値は，$0 < a < 1$のとき$\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$1 \leqq a < 2$のとき$\sqrt{a - \dfrac{a^2}{2}}$

［解 説］

(ii)の場合も(i)の場合と同じく，まず相加平均と相乗平均の関係を用いて最小値m_2を求めようとしました。ところが，等号成立条件が「あやしい」と感じましたので，関数を対応させて丁寧に解いてみました。最終的には，杞憂に過ぎなかったものの，解は長くなってしまいました。

4

問題のページへ

$I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと，部分積分により，

$$I_n=\left[t^n e^t\right]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt=e-nI_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!}=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

証明すべき式 $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!\cdots\cdots(*)$ は，②より，

$$(*)\Leftrightarrow\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)=1\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\displaystyle\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}=J_n$ とおくと，

$$③\Leftrightarrow J_n=1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，①から，

$$J_{n+1}=\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e-(2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{I_{2n}}{(2n)!}$$

$$=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e-2nI_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e}{(2n)!}+\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=J_n+e\left(\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{(2n)!}\right)$$

$n\geqq2$ で，$\displaystyle J_n=J_1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)$

ここで，$\displaystyle J_1=I_1=\int_0^1 te^t dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-(e-1)=1$

よって, $n\geqq2$ で④は成立するので, $(*)$は成立する。

［解 説］

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると，直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}_n(w_n)$ とすると，$w_0=0$，$w_1=1+i$ となる。また $\mathrm{P}_\infty(w_\infty)$ とおく。

ここで，$\alpha=\dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{1}{3}\pi+i\sin\dfrac{1}{3}\pi\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$ とすると，条件より，

$$w_n-w_{n-1}=\alpha(w_{n-1}-w_{n-2})$$

$$w_{n+1}-w_n=(w_1-w_0)\alpha^n=(1+i)\alpha^n$$

$n\geqq 1$ で，$w_n=w_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)\alpha^k=(1+i)\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$|\alpha|=\dfrac{2}{3}<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\alpha^n\to 0$，$w_n\to w_\infty$ なので，

$$w_\infty=\frac{1+i}{1-\alpha}=\frac{1+i}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{3}}=\frac{3(1+i)}{2-\sqrt{3}i}=\frac{3(2-\sqrt{3})+3(2+\sqrt{3})i}{7}$$

(2)　$\mathrm{Q}_n(z_n)$ とすると，$z_0=0$，$z_1=z$ となる。また $\mathrm{Q}_\infty(z_\infty)$ とおく。

ここで，$\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi+i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ とすると，条件より，

$$z_n-z_{n-1}=\beta(z_{n-1}-z_{n-2})$$

$$z_{n+1}-z_n=(z_1-z_0)\beta^n=z\beta^n$$

$n\geqq 1$ で，$z_n=z_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z\beta^k=z\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$

$|\beta|=\dfrac{1}{2}<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\beta^n\to 0$，$z_n\to z_\infty$ なので，

$$z_\infty=\frac{z}{1-\beta}=\frac{z}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{4}}=\frac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}$$

条件より，$z_\infty=w_\infty$ なので，$\dfrac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})+3(2+\sqrt{3})i}{7}$

よって，$z=\dfrac{3}{28}\left\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\right\}\left\{(4-\sqrt{3})-i\right\}$

$$=\frac{3(13-5\sqrt{3})+9(1+\sqrt{3})i}{28}$$

［解 説］

複素数列の極限に関する有名頻出問題です。昨年も上智大・理工で類題が出ています。