1

解答解説のページへ

関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1+x$ を示せ。

(2) $\tan\theta = M \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \theta$ を示せ。

(3) $M > 0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}\,dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=A$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+d\neq 1$ のとき, A を決定せよ。

(2)　実数 $u,\ v,\ x,\ y$ が $ux+vy=1$ を満たすとき，2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ は $X^2=X$ を満たすことを示せ。

(3)　$a+d=1$ のとき，$d\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が成り立ち, A は(2)の X の形になることを示せ。

5

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　点$(3,\ 0)$を通り，円$(x+3)^2+y^2=4$と互いに外接する円の中心$(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。

(2)　(1)の軌跡上の点と定点$(0,\ a)$との距離の最小値を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ より,

$$f_n{}'(x)=(n+2)\sin^{n+1}x\cos x-2(n+2)\cos^{n+1}x\sin x$$
$$=(n+2)\sin x\cos x(\sin^n x-2\cos^n x)$$

また, $\sin^n\alpha=2\cos^n\alpha$ すなわち $\tan^n\alpha=2$, $\tan\alpha=2^{\frac{1}{n}}$ を満たす α が, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在し, これより $f_n(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n{}'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f_n(x)$	2	↘		↗	1

このとき, $1+2^{\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ から $\cos^2\alpha=\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-1}$, $\cos\alpha=\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

すると, $f_n(\alpha)=\sin^{n+2}\alpha+2\cos^{n+2}\alpha=\sin^n\alpha\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cos^2\alpha$

$$=2\cos^n\alpha\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cos^2\alpha=2\cos^n\alpha=2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

以上より, $M_n=2$, $L_n=2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$

(2)　(1)より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}=1\times2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

［解 説］

問題を見たときに, (2)は e の定義式を利用する設問と推測しましたが, その予想は, はずれてしまいました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1$

$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ より，$f(x) \geqq f(0)=0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq 1+x$ ………①

(2)　$x=\tan\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$x=0$ のとき $\varphi=0$ となり，また条件より，

$x=M$ のとき $\varphi=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるので，

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=\int_0^\theta d\varphi=\Big[\varphi\Big]_0^\theta=\theta \text{………②}$$

(3)　①より，$e^{x^2} \geqq 1+x^2$ から，$\dfrac{1}{e^{x^2}} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ となり, $M>0$ に対して,

$$\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx \leqq \int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，②より，$\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx=\theta<\frac{\pi}{2}$

したがって，$\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx<\frac{\pi}{2}$

［解　説］

ノーヒントで(3)の結論の証明では難問ですが，(1)(2)のていねいな誘導のおかげで，基本題となっています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ より，$\log x^{\sqrt{a}} \leqq \log a^{\sqrt{x}}$，$\sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a$ なので，

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}} \cdots\cdots\cdots (*)$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \log x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	0

すると，(*)はどんな正の実数 x についても，$f(x) \leqq f(a)$ ということなので，この条件を満たす a の値は，上表より $a = e^2$ となる。

［解 説］

毎年のように類題の出る頻出有名問題です。ポイントは(*)の形に不等式を変形することです。過去の記憶を辿っていくと，98 年の都立大・後期，97 年の東北大などがあります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　Eを単位行列とすると，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対し，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$A^2=A\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$(1-a-d)A+(ad-bc)E=O\cdots\cdots\cdots③$

$a+d\neq 1$なので，③から，$A=\dfrac{ad-bc}{a+d-1}E=kE\quad\left(k=\dfrac{ad-bc}{a+d-1}\right)$

②に代入して，$k^2E=kE$なので，$k=0,\ 1$

よって，$k=0$のとき$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$k=1$のとき$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$X=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ux & uy \\ vx & vy \end{pmatrix}$に対し，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$X^2-(ux+vy)X+(uxvy-uyvx)E=O$$

$ux+vy=1$より，$X^2-X=O$，$X^2=X$

(3)　$a+d=1$のとき，③より$(ad-bc)E=O$，$ad-bc=0$

すると，$d\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}-c\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc \\ cd-cd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$から，$d\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

(i)　$d\neq 0$のとき　$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\dfrac{c}{d}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$より，$A=\begin{pmatrix} \frac{c}{d}\cdot b & b \\ \frac{c}{d}\cdot d & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}$

(ii)　$d=0$のとき　$a=1$，$bc=0$より，$A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix}$

(i)(ii)のいずれの場合も，Aは(2)のXの形になる。

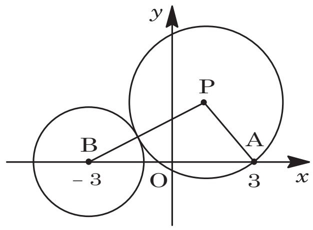
［解 説］

行列Xは 2×1 行列と 1×2 行列との積の形で表されていますが，上の解では，その特性は利用せずに，普通に計算を進めました。

5

問題のページへ

(1)　A(3, 0), B(−3, 0)とし，円の中心をP(X, Y)とおく。



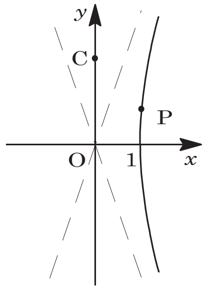
条件より，PB − 2 = PA，PB − PA = 2

すると，点 P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の右側の枝を描く。

この方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(c^2=a^2+b^2)$ とすると，

$2a=2$ より $a=1$，また $c=3$ から $b^2=3^2-1^2=8$ となる。

よって，$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$　$(x>0)$



(2)　(1)より，点 P(X, Y) は $X^2-\dfrac{Y^2}{8}=1$ $(X>0)$ を満たし，

C(0, a)とおくと，

$$\mathrm{PC}^2=X^2+(Y-a)^2=1+\frac{Y^2}{8}+(Y-a)^2$$
$$=\frac{9}{8}Y^2-2aY+a^2+1=\frac{9}{8}\left(Y-\frac{8}{9}a\right)^2+\frac{1}{9}a^2+1$$

Y は任意の値をとりうるので，$Y=\dfrac{8}{9}a$ のとき PC^2 は最小値をとる。このとき PC は最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{9}a^2+1}=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+9}$ をとる。

[解 説]

第 3 問に続き，本問も有名頻出問題です。類題は 98 年の東北大などで出ています。