1

解答解説のページへ

$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ において連続かつ $0 < x < 1$ において微分可能で $f'(x) > 0$ を満たす関数とする。$0 < t < 1$ に対し，$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)|x\,dx$ とおく。

(1)　導関数 $I'(t)$ を求めよ。

(2)　$I(t)$ が最小となる t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　$x>0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$

(2)　$f(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ で連続で，$f(x)\geqq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right),\quad I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^I$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y=x(1-x)\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

4　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$と数cが次の条件を満たすとする。

$$a_1=2,\ \ a_2=2\,,\ \ a_{n+1}=2a_n+ca_{n-1}\,,\ \ a_{n+2}=(2c+1)a_n+6a_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

(1)　cを求めよ。

(2)　$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$を満たす2次正方行列$A$を求めよ。

(3)　$A\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$を満たす数$b$をすべて求めよ。

(4)　a_nを求めよ。

5

解答解説のページへ

C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ, $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を，θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加するので，$0\leqq x<t$ で $f(x)<f(t)$, $t<x\leqq 1$ で $f(x)>f(t)$ となる。

$$I(t)=\int_0^1|f(t)-f(x)|x\,dx=\int_0^t\{f(t)-f(x)\}x\,dx-\int_t^1\{f(t)-f(x)\}x\,dx$$

$$=f(t)\int_0^t x\,dx-\int_0^t xf(x)\,dx-f(t)\int_t^1 x\,dx+\int_t^1 xf(x)\,dx$$

$$=\frac{t^2}{2}f(t)-\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{2}\right)f(t)-\int_0^t xf(x)\,dx+\int_t^1 xf(x)\,dx$$

$$=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)f(t)-\int_0^t xf(x)\,dx-\int_1^t xf(x)\,dx$$

すると，$I'(t)=2tf(t)+\left(t^2-\frac{1}{2}\right)f'(t)-tf(t)-tf(t)=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)f'(t)$

(2)　(1)より，$I'(t)=\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)f'(t)$

$f'(t)>0$ なので，右表より $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $I(t)$ は最小となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$I'(t)$		$-$	0	$+$	
$I(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

［解 説］

絶対値のついた関数を積分する問題です。ただし，$f'(x)>0$ という条件があるため，煩雑な計算は必要ありません。

2

問題のページへ

(1)　$g(x)=x-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$

$x>0$ に対して，$g(x)>g(0)=0$ なので，$\log(1+x)<x$

また，$h(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

$x>0$ に対して，$h(x)>h(0)=0$ なので，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$

以上より，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

(2)　
$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\geqq 0$ なので, (1)より，

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\leqq\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\,dx=I$

また，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\to\int_0^1\{f(x)\}^2dx$ より，$\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\to 0$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=I$

すると，対数関数は連続関数なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^I$ である。

[解 説]

はさみうちの原理に加えて，区分求積法も利用し，極限値を証明する問題です。うまい誘導がついています。

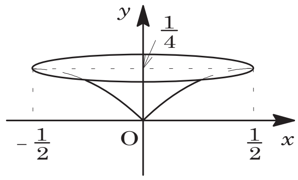
3

問題のページへ

(1)　$y = x(1-x)$ より，$x^2 - x + y = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-4y})$

$$x^2 = \frac{1}{2}(1-2y-\sqrt{1-4y})$$



$0 \leqq y \leqq h$ における水量を W とすると，

$$W = \int_0^h \pi x^2 dy = \frac{\pi}{2}\int_0^h (1-2y-\sqrt{1-4y})\,dy$$

すると，$\dfrac{dW}{dh} = \dfrac{\pi}{2}(1-2h-\sqrt{1-4h})$ ………①

ここで条件より，$\dfrac{dW}{dt} = V$，$\dfrac{dh}{dt} = u$，$\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{dW}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ なので，

$$V = \frac{dW}{dh}u \text{ ………②}$$

①②より，$V = \dfrac{\pi}{2}(1-2h-\sqrt{1-4h})u$ なので，

$$u = \frac{2V}{\pi(1-2h-\sqrt{1-4h})} = \frac{V(1-2h+\sqrt{1-4h})}{2\pi h^2}$$

(2)　$\dfrac{dW}{dt} = V$ で，$t = 0$ のとき $W = 0$ から，$W = Vt$ ………③

$h = \dfrac{1}{4}$ のとき，容器に水がいっぱいになり，このときの水量 W は，

$$W = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} (1-2y-\sqrt{1-4y})\,dy = \frac{\pi}{2}\left[\, y - y^2 + \frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}} \,\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{96} \text{ ………④}$$

③④より，$Vt = \dfrac{\pi}{96}$ となり，求める時間は $t = \dfrac{\pi}{96V}$ である。

［解 説］

以前はよく出題されていた水の問題に久々に出会いました。演習する価値のある問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $a_{n+1}=2a_n+ca_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$, $a_{n+2}=(2c+1)a_n+6a_{n-1}\cdots\cdots\cdots②$

①より，$a_{n+2}=2a_{n+1}+ca_n=2(2a_n+ca_{n-1})+ca_n=(c+4)a_n+2ca_{n-1}$

②と一致することより，$2c+1=c+4$，$2c=6$ であり，$c=3$ となる。

(2) ①より，$a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ なので，$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n\end{pmatrix}$

したがって，$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2\end{pmatrix}$

(3) E を単位行列とし，$X=\begin{pmatrix} 1 \\ b\end{pmatrix}$ とおくと，条件より，$AX=bX$

$$(A-bE)X=O\cdots\cdots\cdots③$$

$X\neq O$ なので，③より $(A-bE)^{-1}$ が存在しない。

ここで，$A-bE=\begin{pmatrix} -b & 1 \\ 3 & 2-b\end{pmatrix}$ より，$-b(2-b)-3=0$ となり，$b=3,\ -1$

$b=3$ のとき，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots④$

$b=-1$ のとき，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots⑤$

$b=3$ のときも，$b=-1$ のときも，ともに題意を満たす。

(4) ④より $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3\end{pmatrix}=3^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3\end{pmatrix}$，⑤より $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}=(-1)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}$

$$A^n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-1-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n+3(-1)^n & 3^n-(-1)^n \\ 3^{n+1}+3(-1)^{n+1} & 3^{n+1}-(-1)^{n+1}\end{pmatrix}$$

ここで, (2)より，$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^{n-1}+3(-1)^{n-1} & 3^{n-1}-(-1)^{n-1} \\ 3^n+3(-1)^n & 3^n-(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2\end{pmatrix}$$

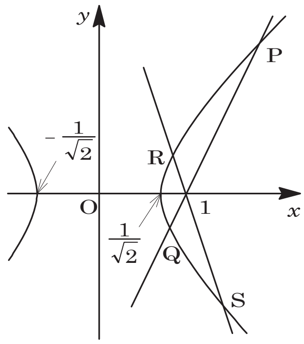
よって，$a_n=\frac{1}{2}\{3^{n-1}+3(-1)^{n-1}\}+\frac{1}{2}\{3^{n-1}-(-1)^{n-1}\}=3^{n-1}+(-1)^{n-1}$

[解　説]

漸化式と行列の n 乗の融合という以前よく出会った問題です。前問にひき続き懐かしいという感じがします。

5

問題のページへ



(1)　直線 l の方向ベクトルを $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすることができるので,

$$(x,\ y)=(1,\ 0)+t(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=(1+t\cos\theta,\ t\sin\theta)$$

$2x^2-2y^2=1$ に代入して,

$$2(1+t\cos\theta)^2-2t^2\sin^2\theta=1$$
$$2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+4t\cos\theta+1=0$$
$$2t^2\cos 2\theta+4t\cos\theta+1=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

θ は $\frac{\pi}{4}$ の整数倍でないので, $\cos 2\theta\neq 0$ となり,

$$D/4=4\cos^2\theta-2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2(2\cos^2\theta-1)=2$$

$D>0$ より t は 2 つ存在し, 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点で交わる。

(2)　$(*)$の解を $t=\alpha,\ \beta$ とすると, $\mathrm{P}(1+\alpha\cos\theta,\ \alpha\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1+\beta\cos\theta,\ \beta\sin\theta)$ となり, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta=-\frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta},\ \alpha\beta=\frac{1}{2\cos 2\theta}$$

よって, $\mathrm{PQ}^2=(1+\alpha\cos\theta-1-\beta\cos\theta)^2+(\alpha\sin\theta-\beta\sin\theta)^2$

$$=(\alpha-\beta)^2\cos^2\theta+(\alpha-\beta)^2\sin^2\theta=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\frac{4\cos^2\theta}{\cos^2 2\theta}-\frac{2}{\cos 2\theta}=\frac{4\cos^2\theta-2\cos 2\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{2}{\cos^2 2\theta}$$

(3)　(2)と同様にして, $\mathrm{RS}^2=\dfrac{2}{\cos^2 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{\cos^2\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2}{\sin^2 2\theta}$

したがって, $\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}=\dfrac{\cos^2 2\theta}{2}+\dfrac{\sin^2 2\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$

［解 説］

一般的に計算量の多い 2 次曲線と直線の関係についての問題です。媒介変数を利用して, 計算量を減らす工夫がポイントです。