1

解答解説のページへ

a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\ (x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2) $f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり，関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。

2

解答解説のページへ

曲線 C を次の方程式で定める。

$$y=\sqrt{x^2+4}\ (x\geqq 0)$$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標，y 座標を t で表せ。

(2) 点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。

(3) 原点を O とし，線分 OP，曲線 C，y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

3

解答解説のページへ

$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，関数 $g(x)$ $(x>0)$ を次のように定める。

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ (0<x<1),\quad g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt\ (x\geqq 1)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \neq 1$ のおける導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)$ のとき，$g(x)$ を求めよ。

(3)　次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x)=\sin(2\pi x)+x\ (0<x<1),\quad g(x)=1\ (x\geqq 1)$$

4

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。ただし，a，b，c，d は実数とし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1)　$a+d\neq 0$ とする。$A^2=E$ ならば $A=E$ または $A=-E$ であることを示せ。

(2)　$a=d\neq 0$ とする。

(i)　行列 A^2+E は逆行列をもつことを示せ。

(ii)　$A^4=E$ ならば $A=E$ または $A=-E$ であることを示せ。

5

解答解説のページへ

aを正の実数とする。曲線C_aを極方程式$r = 2a\cos(a - \theta)$によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C_aは円になることを示し，その中心と半径を求めよ。

(2)　C_aが直線$y = -x$に接するようなaをすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{(1+x)^a}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}(1+x)^a-a\log x\cdot(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=\dfrac{1+x-ax\log x}{x(1+x)^{a+1}}$

ここで，$g(x)=1+x-ax\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり，

$$g\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=1+e^{\frac{1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=1,\quad g\left(e^{\frac{2}{a}}\right)=1+e^{\frac{2}{a}}-ae^{\frac{2}{a}}\cdot\frac{2}{a}=1-e^{\frac{2}{a}}<0$$

$x>0$ なので $x(1+x)^{a+1}>0$ より，$f'\left(e^{\frac{1}{a}}\right)>0$，$f'\left(e^{\frac{2}{a}}\right)<0$

よって，$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在する。

(2)　$g'(x)=1-a\log x-ax\cdot\dfrac{1}{x}=1-a-a\log x$

$g'(x)=0$ の解は $\log x=\dfrac{1-a}{a}$ より $x=e^{\frac{1-a}{a}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ から，

$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

よって，$g(x)=0$ となる x は 1 つしかなく，言い換えると，$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つである。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることになる。

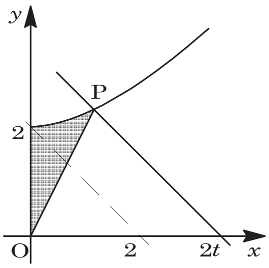
x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

［解 説］

微分法の標準的な問題です。ただ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1) 点$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p^2+4})$を通る傾き$-1$の直線は,

$$y-\sqrt{p^2+4}=-(x-p)$$

点$(2t,\ 0)$を通ることより，$-\sqrt{p^2+4}=-2t+p$

$$p^2+4=(-2t+p)^2,\ tp=t^2-1$$

$$p=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t},\ \sqrt{p^2+4}=2t-p=t+\frac{1}{t}$$

したがって，$\mathrm{P}\left(t-\dfrac{1}{t},\ t+\dfrac{1}{t}\right)$となる。

(2) 点PがC上を動くとき，$2t\geqq 2$から$t\geqq 1$となり, tの最小値は1である。

(3) $S=\displaystyle\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}p\sqrt{p^2+1}=\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)$

ここで, (1)より曲線Cは，$x=u-\dfrac{1}{u}$，$y=u+\dfrac{1}{u}$と表せる。

すると，$dx=\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)du$で，$x=0$のとき$u=1$，$x=p$のとき$u=t$となり,

$$\int_0^p y\,dx=\int_1^t\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du=\int_1^t\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du$$

$$=\left[\frac{u^2}{2}+2\log|u|-\frac{1}{2u^2}\right]_1^t=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+2\log t$$

以上より，$S=\dfrac{1}{2}\left(t^2-\dfrac{1}{t^2}\right)+2\log t-\dfrac{1}{2}\left(t^2-\dfrac{1}{t^2}\right)=2\log t$

［解 説］

(1)は(3)の積分を実行するための誘導となっています。なお, (2)については, 図より明らかなのですが, 関係式$2t=p+\sqrt{p^2+4}$を用いても簡単です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 条件より，$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ (0<x<1)$ なので，$0<x<1$ のとき $g'(x)=f(x)$

また，$g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt\ (x\geqq 1)$ より，$x>1$ のとき $g'(x)=f(x)-f(x-1)$

(2) $0<x<1$ のとき，$g(x)=\int_0^x 2\pi\cos(2\pi t)\,dt=\left[\sin(2\pi t)\right]_0^x=\sin(2\pi x)$

$x\geqq 1$ のとき，$g(x)=\int_{x-1}^x 2\pi\cos(2\pi t)\,dt=\left[\sin(2\pi t)\right]_{x-1}^x$

$$=\sin(2\pi x)-\sin(2\pi(x-1))=\sin(2\pi x)-\sin(2\pi x)=0$$

(3) (1)より，$0<x<1$ のとき $f(x)=g'(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1$ ………①

$x>1$ のとき，$f(x)-f(x-1)=g'(x)=0$ となり，

$f(x)=f(x-1)$ ………②

ここで，$1<x<2$ のとき，$0<x-1<1$ なので，①②より，

$f(x)=2\pi\cos(2\pi(x-1))+1=2\pi\cos(2\pi x)+1$

すると，$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=2\pi+1$ となっており，$f(x)$ は $x=1$ で連続である。また，$f(0)=2\pi+1$ と定義すると，$0\leqq x<2$ において，

$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1$

同様にして，②を利用していくと，$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1\ (x\geqq 0)$

［解 説］

記述の方法の難しい問題です。内容的には，もう一ひねりあるのかとも思ったのですが……。

4

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$について，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$A^2=E\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$-(a+d)A+(ad-bc+1)E=O$

$a+d\neq 0$ より，$A=\dfrac{ad-bc+1}{a+d}E=kE\quad\left(k=\dfrac{ad-bc+1}{a+d}\right)$

②に代入して，$k^2E=E$ となり，$k^2=1$，$k=\pm 1$

よって，$A=E$ または $A=-E$ である。

(2)　$A^2+E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc+1 & 2ab \\ 2ac & bc+a^2+1 \end{pmatrix}$より，

$$\begin{aligned}\varDelta&=(a^2+bc+1)(bc+a^2+1)-4a^2bc=a^4+b^2c^2+1-2a^2bc+2bc+2a^2\\&=a^4+b^2c^2+1-2a^2bc+2bc-2a^2+4a^2=(a^2-bc-1)^2+4a^2>0\end{aligned}$$

よって，A^2+E は逆行列をもつ。

さて，$A^4=E$ のとき，$A^4-E=O$，$(A^2+E)(A^2-E)=O\cdots\cdots\cdots③$

③の両辺に左から，A^2+E の逆行列をかけて，

$$(A^2+E)^{-1}(A^2+E)(A^2-E)=(A^2+E)^{-1}O,\ A^2-E=O,\ A^2=E$$

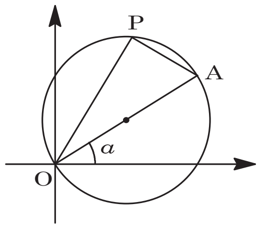
$a+d=2a\neq 0$ なので, (1)より，$A=E$ または $A=-E$ となる。

［解 説］

(2)が(1)の誘導となっている行列の基本的な問題です。$\varDelta>0$ を導くところは，ちょっとテクニカルな変形をしています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　点A$(2a,\ a)$と原点を結ぶ線分を直径とする円周上の点をP$(r,\ \theta)$とおくと，$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{2}$となる。

よって，極方程式$r = 2a\cos(\alpha - \theta)$は，中心$(a,\ a)$，半径$a$の円を表す。なお，点Pが点A，点Oに一致しているときも成立している。

(2)　C_αが直線$y = -x$に接するとき，OAと$y = -x$が直交する。

よって，nを0以上の整数として，$\alpha = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$となる。

［解 説］

この程度の記述でよいのか，もっと詳しく書いた方がよいのか，とまどってしまいます。そんな問題です。