1

解答解説のページへ

実数全体で定義された微分可能な関数$f(x)$が，次の 2 つの条件(i)，(ii)を満たしている。

(i)　すべてのxについて，$f(x)>0$である。

(ii)　すべてのx, yについて，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$が成り立つ。

(1)　$f(0)=1$を示せ。

(2)　$g(x)=\log f(x)$とする。このとき，$g'(x)=f'(0)-x$が成り立つことを示せ。

(3)　$f'(0)=2$となるような$f(x)$を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$ が定める曲線 $y=f(x)$ は原点で直線 $y=x$ に接している。

(1) b の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

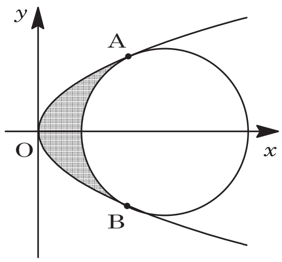
(3) $f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め，そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4) $f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき，a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

右の図のように，円$(x-a)^2+y^2=r^2\left(r>\dfrac{1}{2}\right)$が放物線$y^2=x$と 2 点 A, B で接している。



(1)　点 A の x 座標および a を r で表せ。

(2)　円と放物線で囲まれた部分(網点部分)を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を$V(r)$とする。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}$を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{pmatrix}$ に対して，行列 $P=A-E$ が $P^2=P$ を満たしている。ただし，E は 2 次の単位行列とする。

(1) $a,\ b$ が満たす条件を求めよ。

(2) A の成分がすべて整数のとき，a が満たす条件を求めよ。

(3) $A^{-1}=sP+tE$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 点$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$を焦点とする双曲線C_1と 2 点$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$を焦点とする楕円C_2は 2 点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$のみを共有している。

(1)　C_1とC_2の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　C_1と漸近線を共有し，C_1と異なる双曲線をC_3とする。C_2とC_3が 2 点のみを共有するとき，C_3の方程式を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件(ii)より，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ ………①

①に $x=y=0$ を代入すると，$f(0)=\{f(0)\}^2$

条件(i)より $f(0)>0$ なので，$f(0)=1$ である。

(2) ①より，$\log f(x+y)=\log f(x)f(y)e^{-xy}=\log f(x)+\log f(y)-xy$

$$g(x+y)=g(x)+g(y)-xy$$

x を固定して，両辺を y で微分すると，$g'(x+y)=g'(y)-x$

$y=0$ を代入すると，$g'(x)=g'(0)-x$

ここで，$g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$ なので, (1)より，$g'(0)=\dfrac{1}{f(0)}f'(0)=f'(0)$

よって，$g'(x)=f'(0)-x$ ………②

(3) $f'(0)=2$ のとき，②より，$g'(x)=2-x$

$$g(x)=\int(2-x)\,dx=2x-\frac{x^2}{2}+C$$

$e^C=K$ とすると，$f(x)=e^{g(x)}=e^{2x-\frac{x^2}{2}+C}=Ke^{2x-\frac{x^2}{2}}$

(1)から $f(0)=1$ なので，$K=1$ となり，$f(x)=e^{2x-\frac{x^2}{2}}$ である。

［解 説］

実数全体で $f(x)$ は微分可能なので, (2)では, x を固定して, y で微分をしました。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^2+ax+b-x(2x+a)}{(x^2+ax+b)^2}=\dfrac{-x^2+b}{(x^2+ax+b)^2}$

曲線 $y=f(x)$ が原点で直線 $y=x$ に接しているので，$f'(0)=1$

よって，$b=1$ である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+ax+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a+x^{-1}}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+ax+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+a+x^{-1}}=0$

(3)　$f(x)$ が最大値と最小値をもつためには，まず $x^2+ax+1=0$ が実数解をもたないことが必要であるので，

$D=a^2-4<0$，$-2<a<2$

このとき，$f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+ax+1)^2}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘		↗		↘	0

右表から，$-2<a<2$ のとき，最大値と最小値をもち，最大値は $f(1)=\dfrac{1}{2+a}$，最小値は $f(-1)=\dfrac{-1}{2-a}$ である。

(4)　(i)　$D>0$ $(a<-2,\ 2<a)$ のとき

$x^2+ax+1=0$ は異なる 2 実数解 α，β $(\alpha<-1<\beta<0$ または $0<\alpha<1<\beta)$ をもち，$x=\alpha$，$x=\beta$ の前後で$+\infty$または$-\infty$に発散するので，$f(x)$ は最大値も最小値ももたない。

(ii)　$D=0$ $(a=-2)$ のとき

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-(x+1)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	×	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	×	↘	0

よって，$f(x)$ は最小値をもつが，最大値はもたない。

(iii)　$D=0$ $(a=2)$ のとき

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+1}=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-(x-1)}{(x+1)^3}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	×	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	×	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	0

よって，$f(x)$ は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をもち，最小値はもたない。

(i)(ii)(iii)より，最大値をもつが最小値をもたないのは，$a=2$ のときである。

［解 説］

場合分けの説明を(3)でするのか(4)でするのか，迷ってしまいます。

3

問題のページへ

(1)　$(x-a)^2+y^2=r^2$ ……①と $y^2=x$ ……②が $x>0$ で接するので，②を①に代入し，$(x-a)^2+x=r^2$

$$x^2-(2a-1)x+a^2-r^2=0 \text{ ………③}$$

③が正の重解をもつことより，$2a-1>0$ ………④

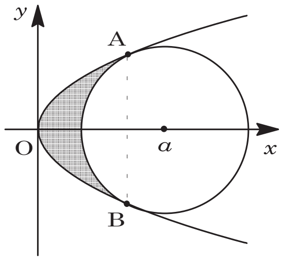
$$D=(2a-1)^2-4(a^2-r^2)=0 \text{ ………⑤}$$

⑤より，$-4a+1+4r^2=0$，$a=\dfrac{1+4r^2}{4}$

$r>\dfrac{1}{2}$ より $a>\dfrac{1+1}{4}=\dfrac{1}{2}$ となり，④は満たされている。

また，接点 A の x 座標は，③の重解なので

$$x=\frac{2a-1}{2}=\frac{1+4r^2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{4r^2-1}{4}$$



(2)　放物線②の $0\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1，円①の $a-r\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とすると，$V(r)=V_1-V_2$ である。

$$V_1=\int_0^{\frac{2a-1}{2}}\pi x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{2a-1}{2}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2$$

(1)より，$V_1=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{4r^2-1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(r+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$V_2=\int_{a-r}^{\frac{2a-1}{2}}\pi\{r^2-(x-a)^2\}dx=\pi\int_{-r}^{-\frac{1}{2}}(r^2-t^2)\,dt\quad(t=x-a)$$

よって，$V_2=\pi\left[r^2x-\dfrac{t^3}{3}\right]_{-r}^{-\frac{1}{2}}=\pi r^2\left(-\dfrac{1}{2}+r\right)-\dfrac{\pi}{3}\left(-\dfrac{1}{8}+r^3\right)$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(2r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{3}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left(2r+\frac{1}{2}\right)$$

$$V(r)=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left\{3\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2r+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left(3r^2-r-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^3\left(3r+\frac{1}{2}\right)$$

以上より，$\displaystyle\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}=\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{\pi}{6}\left(3r+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

［解 説］

円と放物線が原点以外で接する場合なので，(1)では重解条件を用いて計算をしています。

4

問題のページへ

(1)　$P = A - E = \begin{pmatrix} a-1 & -b \\ 3 & 2-a \end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$P^2 - P + \{(a-1)(2-a)+3b\}E = O$$

条件より，$P^2 = P$なので，$\{(a-1)(2-a)+3b\}E = O$

よって，$(a-1)(2-a)+3b = 0$，$3b = (a-1)(a-2)$………(＊)

(2)　a, bが整数なので,(＊)より，$(a-1)(a-2)$は3の倍数となる。

よって，$a-1$，$a-2$のいずれかが3の倍数, すなわちaは3の倍数でない整数である。

(3)　$A = P + E$，$A^{-1} = sP + tE$より，$(P+E)(sP+tE) = E$となり，

$$sP^2 + (s+t)P + (t-1)E = O$$

$P^2 = P$より，$(2s+t)P + (t-1)E = O$

PはEの実数倍ではないので，$2s + t = 0$，$t - 1 = 0$

よって，$s = -\dfrac{1}{2}$，$t = 1$

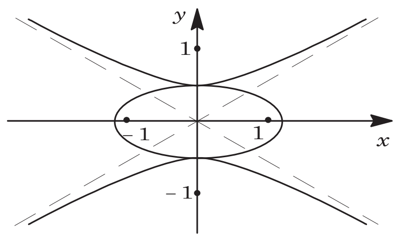
［解 説］

行列の基本問題です。成分計算をするよりは，ハミルトン・ケーリーの定理を利用した方が簡明です。

5

問題のページへ

(1)　焦点が$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$である双曲線C_1の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　$(a^2+b^2=1^2)$とおくと，2点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$を通ることより$b=\dfrac{1}{2}$となり，



$$a^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$C_1:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$

焦点が$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$である楕円C_2の方程式を$\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$　$(p^2-q^2=1^2)$とおくと，2点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$を通ることより$q=\dfrac{1}{2}$となり，

$$p^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ p=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって，$C_2:\dfrac{4x^2}{5}+4y^2=1$

(2)　双曲線C_3は，双曲線C_1と漸近線を共有し，楕円C_2と 2 点を共有するので，その方程式を$\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$とおくことができる。

さて，C_1の漸近線は$y=\pm\dfrac{b}{a}x$より，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$となるので，

$$\frac{d}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ d=\frac{1}{\sqrt{3}}c\ \cdots\cdots\cdots①$$

C_2と共有する2点は$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$なので，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

よって，$C_3:\dfrac{4x^2}{5}-\dfrac{12y^2}{5}=1$

［解 説］

楕円と双曲線についての基本事項の確認問題です。