

解答解説のページへ

**1**関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log|x|}{x} & (|x| > 1) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (|x| \leq 1) \end{cases}$$

と定める。ただし、 $a, b, c, d$  は定数とし、 $f(x)$  は  $x = \pm 1$  において微分可能とする。なお、 $\log$  は  $e = 2.718\dots$  を底とする自然対数である。

- (1)  $a, b, c, d$  の値を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の最大値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

 $f(x) = \sin^3 x$  とする。

- (1)  $f'(0)$  および  $f'(2\pi)$  を求めよ。
- (2)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  を求めよ。
- (3)  $p(x)$  を  $x$  の 2 次式とするとき,  $\int_0^{2\pi} p(x) f''(x) dx = 0$  を示せ。

**3**

解答解説のページへ

$f(x)$ は  $x \geq 0$  で連続で、 $f(0) = 0$ かつ  $x > 0$  において  $f'(x) > 0$ を満たすとする。  
 $t > 0$ に対して、曲線  $y = f(x)$ と  $x$ 軸および直線  $x = t$ とで囲まれる図形を  $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $X(t)$ 、曲線  $y = f(x)$ と  $y$ 軸および直線  $y = f(t)$ とで囲まれる図形を  $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $Y(t)$ とする。また、 $X(0) = Y(0) = 0$ とする。このとき、次を示せ。

- (1)  $X'(t) = \pi f(t)^2$ ,  $Y'(t) = \pi t^2 f'(t)$  ( $t > 0$ )である。
- (2)  $f(x)$ が整式でかつ、すべての  $t \geq 0$  に対して  $X(t) = Y(t)$ が成り立つならば、 $f(x) = x$  ( $x \geq 0$ )である。
- (3)  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ならば、 $X(t) = Y(t)$  ( $t \geq 0$ )である。

**4**

解答解説のページへ

2次正方行列  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  が等式  $X^2 + aX + bE = O$  を満たすとする。ただし、 $x, y, z, w, a, b$  は実数、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。

- (1)  $x + w \neq -a$  のとき、 $a^2 - 4b > 0$ であることを示し、 $a, b$  を用いて  $X$  を表せ。
- (2)  $a^2 - 4b \leq 0$  のとき、 $yz \leq 0$  を示せ。

**5**

解答解説のページへ

楕円  $C : \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上の点で、 $x \geq 0$  の範囲にあり、定点  $A(0, -1)$  との距離が最大となる点を  $P$  とする。

- (1) 点  $P$  の座標と線分  $AP$  の長さを求めよ。
- (2) 点  $Q$  は楕円  $C$  上を動くとする。 $\triangle APQ$  の面積が最大となるとき、点  $Q$  の座標および  $\triangle APQ$  の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)  $|x| > 1$  のとき  $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$ ,  $|x| \leq 1$  のとき  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

まず,  $f(x)$  は  $x = \pm 1$  において微分可能なので,  $x = \pm 1$  で連続である。

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) \text{ より, } 0 = a + b + c + d \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = f(-1) \text{ より, } 0 = -a + b - c + d \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より,  $a + c = 0$ ,  $b + d = 0$  となり,  $c = -a$ ,  $d = -b$  から,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - ax - b \quad (|x| \leq 1)$$

このとき,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}{1+h} = \log e = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(1+h)^3 + b(1+h)^2 - a(1+h) - b}{h} = 2a + 2b$$

$f(x)$  は  $x = 1$  において微分可能なので,  $2a + 2b = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$

また,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1-h)}{h(-1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1-h)^{\frac{1}{h}}}{1-h} = \log e = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(-1+h)^3 + b(-1+h)^2 - a(-1+h) - b}{h} \\ &= 2a - 2b \end{aligned}$$

$f(x)$  は  $x = -1$  において微分可能なので,  $2a - 2b = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$

③④より  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$  となり,  $c = -a = -\frac{1}{2}$ ,  $d = -b = 0$  である。

(2) (1)より,  $|x| \leq 1$  のとき  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$  となり,

$$f(-x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = -f(x)$$

また,  $|x| > 1$  のとき  $f(-x) = \frac{\log|-x|}{-x} = -f(x)$

よって,  $y = f(x)$  のグラフは原点对称となっており, 以下  $x \geq 0$  で考える。

(i)  $0 \leq x \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1) \end{aligned}$$

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

(ii)  $x > 1$  のとき

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$x$	1	...	$e$	...	$\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$x < 0$  のときを考え合わせると、 $f(x)$  の最大値は、 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  または  $f(e) = \frac{1}{e}$  である。

ここで、 $3\sqrt{3} > e$  から、 $\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{e}$  であるので、 $f(x)$  の最大値は  $\frac{1}{e}$  となる。

### [解説]

$x = \pm 1$  において微分可能という条件を、まず連続という必要条件から攻めていくことがポイントとなります。

2

問題のページへ

$$(1) f(x) = \sin^3 x \text{ より, } f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x \text{ となり,}$$

$$f'(0) = 0, f'(2\pi) = 0$$

$$(2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin x - \cos^2 x \sin x) dx = \left[ -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$(3) p(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \text{ とおくと, (1), (2) より,}$$

$$\int_0^{2\pi} p(x) f''(x) dx = \int_0^{2\pi} (ax^2 + bx + c) f''(x) dx$$

$$= \left[ (ax^2 + bx + c) f'(x) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (2ax + b) f'(x) dx$$

$$= - \left[ (2ax + b) f(x) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2af(x) dx$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$$

### [解説]

(2)の結論はグラフの対称性から明らかなのですが、そのまま計算しても容易に示せます。



3

問題のページへ

(1) まず,  $X(t) = \pi \int_0^t \{f(x)\}^2 dx$  より,  $X'(t) = \pi \{f(t)\}^2$

また,  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で連続で, 単調に増加するので,

$$Y(t) = \pi \int_0^{f(t)} x^2 dy = \pi \int_0^t x^2 f'(x) dx$$

よって,  $Y'(t) = \pi t^2 f'(t)$

(2)  $t \geq 0$  に対して  $X(t) = Y(t)$  より,  $X'(t) = Y'(t)$  ( $t > 0$ ) とな

るので, (1) から,

$$\pi \{f(t)\}^2 = \pi t^2 f'(t), \quad \{f(t)\}^2 = t^2 f'(t) \cdots \cdots (*)$$

ここで,  $f(x)$  が定数の場合は, 明らかに (\*) は成立しないので,  $n \geq 1$  として,  $f(x)$  を  $n$  次の整式とする。

(\*) の左辺の次数は  $2n$ , 右辺の次数は  $2 + (n-1) = n+1$  から,

$$2n = n+1, \quad n=1$$

これより,  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) とおくことができる。

(\*) に代入して,  $(at+b)^2 = at^2$ ,  $(a^2 - a)t^2 + 2abt + b^2 = 0$

すべての  $t > 0$  に対して成立するので,

$$a^2 - a = 0, \quad 2ab = 0, \quad b^2 = 0$$

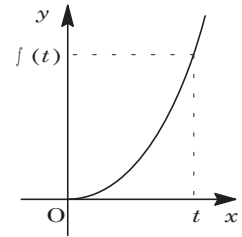
$a \neq 0$  から,  $a = 1$ ,  $b = 0$  となり,  $f(x) = x$  ( $x \geq 0$ ) である。

(3)  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  のとき,  $f(0) = 0$  かつ  $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$  ( $x > 0$ ) であり,

$$\{f(t)\}^2 = \frac{t^2}{(1+t)^2} = t^2 f'(t)$$

よって, (1) より,  $X'(t) = Y'(t)$

すると,  $X(0) = Y(0)$  から,  $t \geq 0$  において,  $X(t) = Y(t)$  である。



### [解説]

抽象関数が題材で, しかも問題文が長いのですが, 案ずるほどではありませんでした。

4

問題のページへ

(1)  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  に対して、ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると、

$$X^2 - (x+w)X + (xw - yz)E = O \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{条件より, } X^2 + aX + bE = O \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{から, } (-x-w-a)X + (xw - yz - b)E = O \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$x+w \neq -a \text{ のとき, } X = \frac{xw - yz - b}{x+w+a} E$$

$$\text{ここで, } \frac{xw - yz - b}{x+w+a} = k \text{ とおくと, } X = kE \text{ (} k \text{ は実数)}$$

$$\textcircled{2}\text{に代入して, } (k^2 + ak + b)E = O, \quad k^2 + ak + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて、 $\textcircled{4}$ が重解をもつとき、その重解は  $k = -\frac{a}{2}$  となる。このとき、 $X = -\frac{a}{2}E$  で

あり、 $x+w = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -a$  となるが、これは  $x+w \neq -a$  に反する。

よって、 $\textcircled{4}$ は異なる2つの実数解をもち、 $D = a^2 - 4b > 0$

このとき、 $\textcircled{4}$ の解は、 $k = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$  であり、

$$X = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (1)より、 $a^2 - 4b \leq 0$  のとき、 $x+w = -a \cdots \cdots \textcircled{5}$

$$\textcircled{3}\text{から, } xw - yz - b = 0, \quad xw = yz + b \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}\textcircled{6}$ より、 $x, w$  は2次方程式  $t^2 + at + (yz + b) = 0$  の2つの実数解となり、

$$D = a^2 - 4(yz + b) \geq 0, \quad 4yz \leq a^2 - 4b$$

$a^2 - 4b \leq 0$  なので、 $yz \leq 0$  である。

### [解説]

(2)は、(1)の命題の対偶を考えるとところからスタートします。(1)と(2)の設問がうまくつながっています。

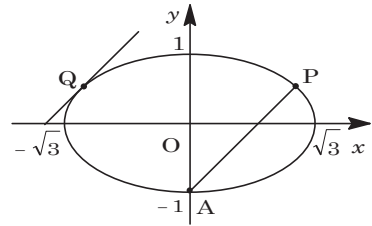
5

問題のページへ

(1) 点 P は楕円  $C : \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上の点なので、

$P(\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$  とおくと、

$$\begin{aligned} AP^2 &= (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sin \theta + 1)^2 \\ &= 3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 1 \\ &= -2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta + 4 \\ &= -2 \left( \sin \theta - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$



これより、AP は  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  のとき、最大値  $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$  をとる。このとき、点 P の座標は、 $x \geq 0$  より  $(\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$ 、すなわち  $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  である。

(2) まず、 $\overrightarrow{AP} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{2}(1, 1)$  である。

楕円 C 上の点 Q を  $(\sqrt{3} \cos \varphi, \sin \varphi)$  とおくと、Q における接線の方程式は、

$$\frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{3} x + (\sin \varphi) y = 1 \cdots \cdots (*)$$

この接線が直線 AP と平行になるとき、 $\triangle APQ$  の面積は最大となる。このとき、(\*)の法線ベクトルの成分が  $(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi, \sin \varphi)$  から、

$$1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi + 1 \times \sin \varphi = 0, \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \text{ より, } \varphi + \frac{\pi}{6} = \pi, \quad \varphi = \frac{5}{6} \pi$$

以上より、点 Q の座標は  $(\sqrt{3} \cos \frac{5}{6} \pi, \sin \frac{5}{6} \pi)$ 、すなわち  $Q(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  である。

$\triangle APQ$  の面積の最大値は、 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$  となる。

[解説]

いろいろな解法が考えられますが、上の解では、(1)、(2)とも楕円のパラメータ表示を利用しています。なお、最後の $\triangle APQ$ の面積計算は、PとQのy座標が等しいので、簡単でした。