

1

解答解説のページへ

次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つ存在するように、定数 a の値を求めよ。

$$f(x) = ax + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \right)^4$$

2

解答解説のページへ

曲線 $C : y = \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ を考える。 C 上の点 P における C の法線を l とする。

- (1) 法線 l が点 $Q(0, 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) (1) の条件を満たす点 P に対し、直線 l 、曲線 C 、直線 $y = 1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし、直線 l 、曲線 C 、 x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大きさを比較せよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $C: y = e^x$ 上の異なる 2 点 $A(a, e^a)$, $P(t, e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として, 線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに, $r(a) = \lim_{t \rightarrow a} L_a(t)$ と定義する。

- (1) $r(a)$ を求めよ。
- (2) a が実数全体を動くとき, $r(a)$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

2次正方行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) P が逆行列をもたなければ、 $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる k が存在するか、または $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。
- (2) 条件 $A^2 = O$ 、 $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2次正方行列 A が存在するとき、 P は逆行列をもつことを示せ。
- (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような p, q, r を 1組求め、 $P^{-1}AP$ を計算せよ。

5

解答解説のページへ

実数 a に対して、曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$ によって定める。

- (1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し、その 4 定点の座標を求めよ。
- (2) a が正の実数全体を動くとき、 C_a が通過する範囲を図示せよ。

1

問題のページへ

条件より, $f(x) = ax + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \right)^4$ なので, $c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt$ とおくと,

$$f(x) = ax + \frac{1}{4}c^4$$



$$\begin{aligned} \text{すると, } c &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(at + \frac{1}{4}c^4 \right) \sin t dt = \left[-\left(at + \frac{1}{4}c^4 \right) \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t dt \\ &= \frac{1}{4}c^4 + a \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}c^4 + a \end{aligned}$$

$$\text{よって, } c - \frac{1}{4}c^4 = a \cdots \cdots (*)$$

ここで, $g(c) = c - \frac{1}{4}c^4$ とおくと,

$$g'(c) = 1 - c^3 = -(c-1)(c^2 + c + 1)$$

$\lim_{c \rightarrow \infty} g(c) = \lim_{c \rightarrow -\infty} g(c) = -\infty$ より, (*) を満たす c^4 がただ

c	\cdots	1	\cdots
$g'(c)$	+	0	-
$g(c)$		$\frac{3}{4}$	

1 つ存在するのは, 次の 2 つの場合がある。

(i) c がただ 1 つ存在するとき

$$g(c) \text{ の増減より, } a = \frac{3}{4}$$

(ii) 絶対値が等しく, 符号の異なる 2 つの c が存在するとき

$$a \neq 0 \text{ として, } g(-\alpha) = g(\alpha) \text{ とおくと,}$$

$$-\alpha - \frac{1}{4}\alpha^4 = \alpha - \frac{1}{4}\alpha^4$$

よって, $\alpha = 0$ となり, 不適である。

$$(i)(ii) \text{ より, } a = \frac{3}{4}$$

[解説]

(ii) の場合を忘れがちですが, c^4 という設定は, この場合の検討を要求しているように思われます。

2

問題のページへ

(1) $C: y = \sin x$ に対して、 $y' = \cos x$ なので、

$P(t, \sin t)$ における法線の方程式は、

$$y - \sin t = -\frac{1}{\cos t}(x - t)$$

$Q(0, 1)$ を通ることより、 $1 - \sin t = -\frac{1}{\cos t}(-t)$

$$\cos t(1 - \sin t) - t = 0 \cdots \cdots (*)$$

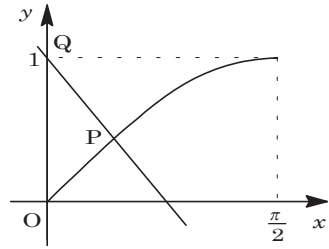
ここで、 $f(t) = \cos t(1 - \sin t) - t$ とおくと、

$$f'(t) = -\sin t(1 - \sin t) - \cos^2 t - 1$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < \sin t < 1$ なので $f'(t) < 0$ となる。

これより、 $f(t)$ は単調減少し、 $f(0) = 1$ 、 $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ から $f(t) = 0$ はただ 1 つ

の解をもち、法線が点 Q を通るような点 P はただ 1 つ存在する。



(2) 直線 l 、曲線 C 、 y 軸で囲まれる部分の面積を S_3 とおくと、

$$S_1 + S_3 = \frac{\pi}{2} \times 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $(*)$ の解を $t = \alpha$ とおくと、 $P(\alpha, \sin \alpha)$ から、

$$l: y - \sin \alpha = -\frac{1}{\cos \alpha}(x - \alpha)$$

x 軸との交点は、 $-\sin \alpha = -\frac{1}{\cos \alpha}(x - \alpha)$ より、 $x = \sin \alpha \cos \alpha + \alpha$ となり、

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) \times 1 = \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より、} S_2 - S_1 = \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \alpha + \alpha) - \frac{\pi}{2} + 1$$

ここで、 $(*)$ から、 $\cos \alpha(1 - \sin \alpha) - \alpha = 0$ 、 $\sin \alpha \cos \alpha + \alpha = \cos \alpha$ なので、

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \pi + 2) < 0$$

よって、 $S_1 > S_2$ である。

[解説]

点 P の座標は求まりませんが、このことは P の x 座標である α の条件として回避できます。その条件を、面積の大小関係の決定につなぐわけです。

3

問題のページへ

(1) $C: y = e^x$ より, $y' = e^x$

$A(a, e^a)$ における法線の方程式は,

$$y - e^a = -\frac{1}{e^a}(x - a) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$P(t, e^t)$ における法線の方程式は,

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x - t) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より, $y - e^a + e^a - e^t = -\frac{1}{e^t}(x - a + a - t)$

①を代入すると, $-\frac{1}{e^a}(x - a) + \frac{1}{e^t}(x - a) = e^t - e^a + \frac{1}{e^t}(t - a)$

$$x - a = -e^a e^t - e^a \frac{t - a}{e^t - e^a}$$

さて, 条件より, $L_a(t) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - e^a)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + \frac{1}{e^{2a}}(x - a)^2}$
 $= \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}} |x - a|$

ここで, $\lim_{t \rightarrow a} |x - a| = \lim_{t \rightarrow a} \left(e^a e^t + e^a \frac{t - a}{e^t - e^a} \right) = (e^a)^2 + e^a \cdot \frac{1}{e^a} = e^{2a} + 1$ から,

$$r(a) = \lim_{t \rightarrow a} L_a(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}} (e^{2a} + 1) = \frac{\sqrt{(e^{2a} + 1)^3}}{e^a}$$

(2) $e^{2a} = s > 0$, $f(s) = \frac{(s+1)^3}{s}$ とおくと, (1)より, $r(a) = \sqrt{f(s)}$ となる。

$$f'(s) = \frac{3(s+1)^2 s - (s+1)^3}{s^2}$$

$$= \frac{(s+1)^2 (2s-1)}{s^2}$$

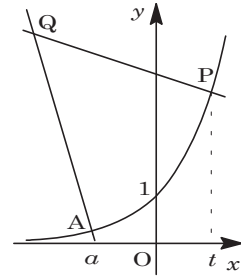
s	0	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(s)$		-	0	+
$f(s)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

右表より, $f(s)$ は最小値 $\frac{27}{4}$ をとるので,

$r(a)$ の最小値は $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

[解説]

計算量が多いので, 少し工夫をしています。なお, $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t - a}{e^t - e^a}$ は, 微分係数の定義を利用して, 極限値を求めています。



4

問題のページへ

(1) $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ に対して, P^{-1} が存在しない条件は, $p - qr = 0 \cdots \cdots (*)$

(i) $r = 0$ のとき $(*)$ から $p = 0$

(ii) $r \neq 0$ のとき $(*)$ から $q = \frac{p}{r}$ となり,

$$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{r} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

よって, $k = \frac{1}{r}$ とおくと, $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる。

(2) 条件より, $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1}$

両辺に左から A をかけて, $A^2 \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, $A^2 = O$ から,

$$A \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて, ここで P^{-1} が存在しないと仮定すると, (1) から,

(i) $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, $\textcircled{1}$ に反する。

(ii) $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ のとき $A \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = kA \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となり, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$

すると, $k = 0$ となり, (1) に反する。

(i)(ii) より, P は逆行列をもつ。

(3) $A \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となり,

$$2p + 4r = q \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad -p - 2r = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より, $q = -2$ であり, このとき $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ は一致する。

そこで, $r = 0$ とすると, $p = -1$ となり,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[解説]

(1) は (2) の誘導ですが, この利用の方法が本問のポイントとなっています。

5

問題のページへ

(1) $C_a: (x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$ より, $x^2 + ay^2 - 2ax - 3a - 1 = 0$

$$(y^2 - 2x - 3)a + (x^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

どんな a に対しても $\textcircled{1}$ が成立する条件は,

$$y^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad x^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } x = \pm 1$$

 $x = 1$ のとき $\textcircled{2}$ から $y = \pm\sqrt{5}$, $x = -1$ のとき $\textcircled{2}$ から $y = \pm 1$ となり, 定点の座標は,

$$(1, \sqrt{5}), (1, -\sqrt{5}), (-1, 1), (-1, -1)$$

(2) $a > 0$ のとき C_a が通過する点 (x, y) は, $\textcircled{1}$ が $a > 0$ の解をもつ (x, y) である。(i) $y^2 - 2x - 3 \neq 0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{より, } a = -\frac{x^2 - 1}{y^2 - 2x - 3} > 0 \text{ から,}$$

$$-(x^2 - 1)(y^2 - 2x - 3) > 0$$

$$(x+1)(x-1)(y^2 - 2x - 3) < 0$$

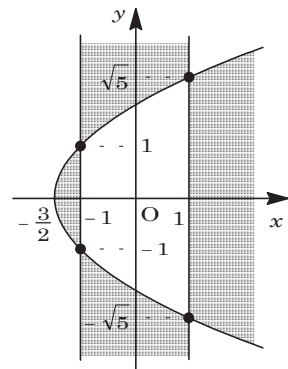
(ii) $y^2 - 2x - 3 = 0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{より, } x^2 - 1 = 0$$

$$(1) \text{から, } (x, y) = (1, \pm\sqrt{5}), (-1, \pm 1)$$

(i)(ii)より, C_a が通過する範囲は右図の網点部となる。

ただし, 黒丸以外の境界は含まない。



[解説]

曲線の通過領域を実数解条件として翻訳する頻出問題です。①式がパラメータ a についての 1 次式なので, 複雑な処理は必要ありません。なお, 領域図示の過程は省きましたが, 原点は不等式を満たさないなので, その隣接領域からはじめて, 市松模様になんか網点をつけています。