

1

解答解説のページへ

$f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ とする。

- (1) $(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$ が x の恒等式となるような整数 t, p, q の値を 1 組求めよ。
- (2) (1) で求めた t, p, q の値を用いて方程式 $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$ を解くことにより、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

 $a \geq b > 0, x \geq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $0 \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$

(2) $a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$

3

解答解説のページへ

座標空間において、 $|x| \leq z^2$ を満たす点 (x, y, z) 全体からなる立体を R とする。
点 $(0, 0, 1)$ を通り、 x 軸と平行な直線を l とする。 l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし、 R と C の共通部分を T とする。

- (1) $-1 < h < 1$ を満たす定数 h に対して、点 $(0, 0, 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。
- (2) T の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標空間において、原点 O を通り方向ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ をもつ直線を L_θ とする。点 $A(2, 0, 1)$ から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする。

- (1) θ が実数全体を動くとき、 P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し、その中心の座標と半径を求めよ。
- (2) θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。三角形 OAP_θ の面積の最大値と、そのときの P_θ の座標を求めよ。

5

解答解説のページへ

行列 A, B を, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 次の式のうち、定義されるものは計算し、定義されないものは「定義されない」とかけ。

(ア) $A+B$ (イ) AB (ウ) BA (エ) AA

(2) 2次正方行列 C が $C(BA) = (BA)C$ を満たすとき, $C = sE + t(BA)$ となる実数 $s,$

t が存在することを示せ。ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

6

解答解説のページへ

xy 平面において、媒介変数 t を用いて

$$x = 2\left(t + \frac{1}{t} + 1\right), \quad y = t - \frac{1}{t}$$

と表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C の方程式を求め、その概形をかけ。
- (2) 点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の値の範囲と、そのときの接線の方程式をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$ より,

$$(2t - 2)x^2 + 4x + t^2 - 8 = p^2x^2 + 2pqx + q^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①が x の恒等式となることより,

$$2t - 2 = p^2 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad 4 = 2pq \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad t^2 - 8 = q^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

 p, q は整数なので, ③より $p = 2, q = 1$ とすると, $t = 3$ で②④は満たされる。よって, ①が恒等式となる 1 組の整数値は, $(t, p, q) = (3, 2, 1)$ (2) (1)より, $f(x) = (x^2 + 3)^2 - (2x + 1)^2$ なので, 方程式 $f(x) = 0$ は,

$$(x^2 + 3)^2 - (2x + 1)^2 = 0, \quad (x^2 + 3 + 2x + 1)(x^2 + 3 - 2x - 1) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

よって, $f(x) = 0$ の解は, $x = -1 \pm \sqrt{3}i, x = 1 \pm i$ である。

[解説]

4 次方程式を誘導つきで解く問題です。(1)では, 1 組の解を求めればよいので, すべての場合をチェックしたわけではありません。

2

問題のページへ

(1) $x \geq 0$ において, $f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと, $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ よって, $x \geq 0$ のとき, $f(x) \geq f(0) = 0$ となり, $e^x - (1+x) \geq 0 \dots\dots\dots ①$ また, $x \geq 0$ において, $g(x) = \frac{x^2 e^x}{2} - e^x + (1+x)$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{2xe^x + x^2 e^x}{2} - e^x + 1 = \frac{(x^2 + 2x - 2)e^x}{2} + 1$$

$$g''(x) = \frac{(2x+2)e^x + (x^2 + 2x - 2)e^x}{2} = \frac{(x^2 + 4x)e^x}{2} \geq 0$$

よって, $x \geq 0$ のとき, $g'(x) \geq g'(0) = 0$ より,

$$g(x) \geq g(0) = 0, \quad \frac{x^2 e^x}{2} \geq e^x - (1+x) \dots\dots\dots ②$$

①②より, $x \geq 0$ のとき, $0 \leq e^x - (1+x) \leq \frac{x^2 e^x}{2}$ (2) (i) $a > b > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a - b} &= a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} \\ &< a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1} \end{aligned}$$

よって, $a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}$ (ii) $a = b > 0$ のとき $a^n - b^n = n(a-b)a^{n-1} = 0$ (i)(ii)より, $a \geq b > 0$ のとき, $a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1} \dots\dots\dots ③$ (3) $x \geq 0$ のとき, ①より, $e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n} > 0$ となるので, ③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq n \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right) \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq n \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{n-1}{n}x} \dots\dots\dots ④$$

②より, $e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n} \leq \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{\frac{x}{n}}}{2} = \frac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{n-1}{n}x} \leq n \cdot \frac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2} e^{\frac{n-1}{n}x} = \frac{x^2 e^x}{2n} \dots\dots\dots ⑤$$

④⑤より, $x \geq 0$ のとき, $e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^x}{2n}$

[解説]

(1)と(2)の不等式が, (3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが, 内容には味わいがあります。

3

問題のページへ

(1) 条件より, 立体 $R: |x| \leq z^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は,

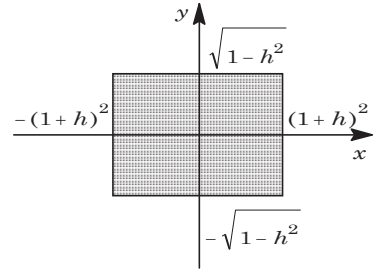
$$C: y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また, 点 $(0, 0, 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は,

$$z = 1+h \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③を①に代入して, $|x| \leq (1+h)^2, -(1+h)^2 \leq x \leq (1+h)^2$ ③を②に代入して, $y^2 + h^2 \leq 1, -\sqrt{1-h^2} \leq y \leq \sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると, 右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は,



$$\begin{aligned} S(h) &= 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2} \\ &= 4(1+h)^2 \sqrt{1-h^2} \end{aligned}$$

(2) T の体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(h) dh = \int_{-1}^1 4(1+h)^2 \sqrt{1-h^2} dh \\ &= 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-h^2} dh + 8 \int_{-1}^1 h \sqrt{1-h^2} dh + 4 \int_{-1}^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{1-h^2} dh + 8 \int_0^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh \end{aligned}$$

ここで, 原点が中心で, 半径 1 の四分円の面積は $\frac{\pi}{4}$ より,

$$\int_0^1 \sqrt{1-h^2} dh = \frac{\pi}{4}$$

また, $h = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_0^1 h^2 \sqrt{1-h^2} dh &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

以上より, $V = 8 \times \frac{\pi}{4} + 8 \times \frac{\pi}{16} = \frac{5}{2} \pi$ である。

[解説]

10 年以上も前, 旧旧課程の頃に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は, 空間図形の内容が削減されたため, 散見される程度でしたが, やや風向きが変わってきたのでしょうか。

4

問題のページへ

(1) t を実数とし, $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ とおくと,

$$L_\theta : (x, y, z) = t\vec{u} = t(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

これより, L_θ 上の点 P_θ は, $P_\theta(t \cos \theta, t \sin \theta, 0)$ とおくことができる。

ここで, $A(2, 0, 1)$ から,

$$\overrightarrow{AP_\theta} = (t \cos \theta - 2, t \sin \theta, -1)$$

条件より, AP_θ と L_θ は直交するので, $\overrightarrow{AP_\theta} \cdot \vec{u} = 0$

$$\cos \theta(t \cos \theta - 2) + t \sin^2 \theta = 0, \quad t = 2 \cos \theta$$

よって, $P_\theta(2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, 0)$ と表せる。

さて, $P_\theta(x, y, z)$ とおくと,

$$x = 2 \cos^2 \theta, \quad y = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad z = 0$$

すると, $x = 1 + \cos 2\theta$, $y = \sin 2\theta$ から, 点 P_θ の描く円の方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

すなわち, xy 平面上で, 中心 $(1, 0, 0)$, 半径 1 の円を描く。

(2) $\overrightarrow{OA} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{OP_\theta} = (2 \cos^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta, 0)$ より, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_\theta} = 4 \cos^2 \theta, \quad |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OP_\theta}| = \sqrt{4 \cos^4 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \sqrt{4 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = 2 \cos \theta$$

ここで, $\triangle OAP_\theta$ の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OP_\theta}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_\theta})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 4 \cos^2 \theta - 16 \cos^4 \theta}$$

$$= \sqrt{5 \cos^2 \theta - 4 \cos^4 \theta} = \sqrt{-4 \left(\cos^2 \theta - \frac{5}{8} \right)^2 + \frac{25}{16}}$$

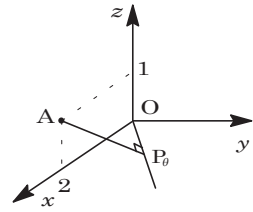
すると, $\cos \theta = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき, S は最大値 $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

をとる。このとき, P_θ の座標は, $x = 2 \times \frac{5}{8}$, $y = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4}$ から,

$$P_\theta \left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0 \right)$$

[解説]

(2)では, 有名な三角形の面積公式を利用しています。2問続けて, 空間図形の問題です。



5

問題のページへ

(1) $A+B$ と AA は定義されない。 AB と BA については、以下のようになる。

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 \\ 7 & -11 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、条件より $C(BA) = (BA)C$ なので、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$4a + 12b = 4a + 8c \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 8a - b = 4b + 8d \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$4c + 12d = 12a - c \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 8c - d = 12b - d \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①より $3b = 2c \cdots \cdots \textcircled{5}$, ②より $8a - 5b - 8d = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$ となる。

③は⑤⑥から導け、④は⑤と一致する。

よって、⑤⑥から、 $c = \frac{3}{2}b$, $d = a - \frac{5}{8}b$ となり、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a - \frac{5}{8}b \end{pmatrix} = \left(a - \frac{b}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{8} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

以上より、 $C = sE + t(BA)$ となる実数 s, t が存在する。

[解説]

行列の積に関する基本問題です。なお、(2)の結果は、よく知られている事実です。

6

問題のページへ

- (1) 条件から, $x - 2 = 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = t - \frac{1}{t} \cdots \cdots \textcircled{2}$ なので,

$$x - 2 + 2y = 4t \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad x - 2 - 2y = \frac{4}{t} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4}\text{より}, \quad (x - 2 + 2y)(x - 2 - 2y) = 16$$

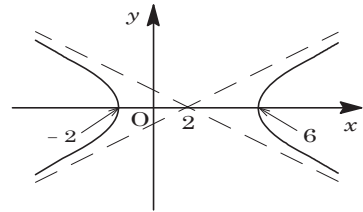
$$(x - 2)^2 - 4y^2 = 16, \quad \frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

ここで, t が 0 以外の任意の値をとるとき, $t + \frac{1}{t} \leq -2$, $2 \leq t + \frac{1}{t}$ から, $\textcircled{1}$ より,

$$x \leq -2, \quad 6 \leq x$$

また, $\textcircled{2}$ より y はすべての実数値をとりうる。

以上より, 曲線 C は $\textcircled{5}$ で表される双曲線全体となり, その概形は右図のようになる。なお, 双曲線の漸近線は, $y = \pm \frac{1}{2}(x - 2)$ である。



- (2) 点 $(a, 0)$ を通り, 傾き m の接線は, $y = m(x - a) \cdots \cdots \textcircled{6}$

$$\textcircled{5}\textcircled{6}\text{より}, \quad (x - 2)^2 - 4m^2(x - a)^2 = 16$$

$$(1 - 4m^2)x^2 + (-4 + 8am^2)x - (4a^2m^2 + 12) = 0$$

$$1 - 4m^2 \neq 0 \left(m \neq \pm \frac{1}{2} \right) \text{のもとで}, \quad D/4 = 0 \text{より},$$

$$(-2 + 4am^2)^2 + (1 - 4m^2)(4a^2m^2 + 12) = 0, \quad (a^2 - 4a - 12)m^2 + 4 = 0$$

この式を満たす $\pm \frac{1}{2}$ でない m が存在する条件は,

$$a^2 - 4a - 12 < 0, \quad \frac{1}{4}(a^2 - 4a - 12) + 4 \neq 0$$

よって, $-2 < a < 6$ かつ $a \neq 2$ となる。

$$\text{このとき}, \quad m = \pm \sqrt{\frac{-4}{a^2 - 4a - 12}} = \pm \frac{2}{\sqrt{-a^2 + 4a + 12}}$$

なお, x 軸に垂直な接線は, $x = 6$ ($a = 6$), $x = -2$ ($a = -2$) である。

以上より, 接線の存在する a の値の範囲は, $-2 \leq a < 2$, $2 < a \leq 6$ であり, 接線の方程式は, $-2 < a < 2$, $2 < a < 6$ のとき,

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{-a^2 + 4a + 12}}(x - a)$$

また, $a = 6$ のとき $x = 6$, $a = -2$ のとき $x = -2$ である。

[解説]

双曲線のパラメータ表示の問題です。なお, 曲線 C が双曲線の全体になることについては, 簡単に触れるに留めました。