1

解答解説のページへ

p, q を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ が 1 より大きい解をもつとき, 点 $(\log_{10} p,\ \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C : x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1) 直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

(3) Q が C 上を 1 周するとき, (2)で求めた体積の最大値，最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx\ ,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ。

(3)　$\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n),\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1) すべての自然数 n について，$a_n{}^2-5b_n{}^2=4$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について，a_n，b_n は自然数かつ a_n+b_n は偶数であることを証明せよ。

5

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$P=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ とする。$AP=PD$ が成り立つとき, a, x, y を求めよ。ただし, $a>0$ とする。

(2)　$(A+tE)^n=4E$ が成り立つような実数 t と自然数 n の組をすべて求めよ。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

放物線 $C : y = x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ $(s < t)$ における接線の交点を $R(X,\ Y)$ とする。

(1) X, Y を t, s を用いて表せ。

(2) 点 P, Q が $\angle\mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ。

1　　問題のページへ

与えられた方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ から,

$$(\log_{10}p+\log_{10}x)(\log_{10}q+\log_{10}x)+1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $\log_{10}x=X$, $\log_{10}p=P$, $\log_{10}q=Q$ とおくと, ①より,

$$(P+X)(Q+X)+1=0,\ X^2+(P+Q)X+PQ+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて, ①が $x>1$ の解をもつ条件は, ②が $X>0$ の解をもつ条件に対応するので,

(i)　$PQ+1>0\ (PQ>-1)$ のとき

②が $X>0$ の解をもつ条件は,

$$D=(P+Q)^2-4(PQ+1)\geqq 0\ \cdots\cdots③,\ -(P+Q)>0\ \cdots\cdots④$$

③より, $(P-Q)^2-4\geqq 0$, $(P-Q+2)(P-Q-2)\geqq 0$

④より, $Q<-P$

(ii)　$PQ+1=0\ (PQ=-1)$ のとき

②の解は $X=0$, $X=-(P+Q)$ となることより, $X>0$ の解をもつ条件は,

$$-(P+Q)>0,\ Q<-P$$

(iii)　$PQ+1<0\ (PQ<-1)$ のとき

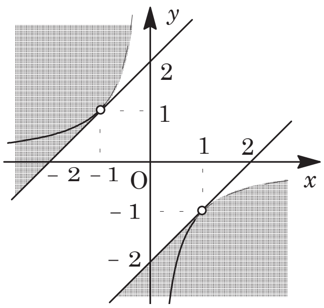
②はつねに $X>0$ の解をもつ。

以上より, 点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$, すなわち点 $(P,\ Q)$ が満たす条件は,

(i)　$xy>-1$ かつ $(x-y+2)(x-y-2)\geqq 0$ かつ $y<-x$

(ii)　$xy=-1$ かつ $y<-x$

(iii)　$xy<-1$



この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 実線の境界は領域に含み, 破線の境界は領域に含まない。

[解 説]

対数の絡んだ解の配置の問題です。基本的ですが, 慎重な処理が必要です。

2

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$より，直線PQは, uを実数として,

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)+u(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

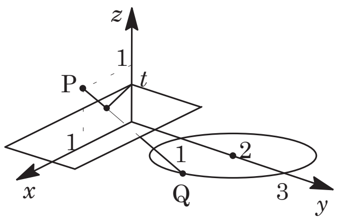
さて，平面$z=t$と交わるのは，$1-u=t$より，$u=1-t$のときであり，このとき,

$$x=1+(1-t)(\cos\theta-1)=(1-\cos\theta)t+\cos\theta\ ,\ \ y=(1-t)(2+\sin\theta)$$

条件より，交点を$(\alpha,\ \beta,\ t)$とおくと,

$$\alpha^2+\beta^2=\{(1-\cos\theta)t+\cos\theta\}^2+(2+\sin\theta)^2(1-t)^2$$
$$=(6+4\sin\theta-2\cos\theta)t^2+(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)t+(5+4\sin\theta)$$

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を，平面$z=t$で切断したときにできる切り口は，中心が$(0,\ 0,\ t)$で，半径が$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$の円である。



その断面積を$S(t)$とおくと,

$$S(t)=\pi(\alpha^2+\beta^2)$$

よって，求める立体の体積Vは, (1)より,

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\pi\int_0^1(\alpha^2+\beta^2)\,dt$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{3}(6+4\sin\theta-2\cos\theta)+\frac{1}{2}(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)+(5+4\sin\theta)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)$$

(3)　αを$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$を満たす角と決めると, (2)より,

$$V=\frac{\pi}{3}\{6+\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)\}$$

すると，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$となり，$V$の最大値は$\dfrac{\pi}{3}(6+\sqrt{17})$，最小値は$\dfrac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$である。

［解 説］

軸とねじれの位置にある線分を回転したときにできる曲面で囲まれた立体の体積を求める頻出問題です。ただ，本問は計算量が多めです。

3

問題のページへ

(1)　$f(t)-g(t)=\int_1^e \dfrac{t^2-x^2}{t-x}\log x\,dx=\int_1^e (t+x)\log x\,dx=t\int_1^e \log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx$

$$=t\Big[x\log x-x\Big]_1^e+\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=t\{e-(e-1)\}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき，$0<\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ より，

$$0<\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx\leqq\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-e}dx=\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx$$

ここで，$\int_1^e x^2\log x\,dx=k>0$ とおくと，$0<g(t)\leqq\dfrac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t\to\infty$のとき $\dfrac{k}{t-e}\to 0$ なので，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$ である。

(3)　(1)より，$f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{bt^2}{t-a}$

$$=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\Big(bt+ab+\frac{a^2b}{t-a}\Big)$$

$$=g(t)+(1-b)t+\frac{1}{4}(e^2+1)-ab-\frac{a^2b}{t-a}$$

$t\to\infty$のとき，$g(t)\to 0$，$\dfrac{a^2b}{t-a}\to 0$ より，$\lim\limits_{t\to\infty}\Big(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\Big)$が有限な値となるために必要な条件は,

$1-b=0$，$b=1$

このとき，$\lim\limits_{t\to\infty}\Big(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\Big)=\lim\limits_{t\to\infty}\Big\{g(t)+\dfrac{1}{4}(e^2+1)-a-\dfrac{a^2}{t-a}\Big\}=0$ より，

$\dfrac{1}{4}(e^2+1)-a=0$，$a=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$

［解 説］

(2)の k の値を計算すると，$\dfrac{1}{9}(2e^3+1)$ となりますが，この値は，ここでは必要ありません。

4

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n)$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$より，

$$\begin{aligned}a_{n+1}{}^2-5b_{n+1}{}^2&=\frac{1}{4}(3a_n+5b_n)^2-\frac{5}{4}(a_n+3b_n)^2\\&=\frac{1}{4}(9a_n{}^2+30a_nb_n+25b_n{}^2)-\frac{5}{4}(a_n{}^2+6a_nb_n+9b_n{}^2)\\&=a_n{}^2-5b_n{}^2\end{aligned}$$

よって，$a_n{}^2-5b_n{}^2=a_1{}^2-5b_1{}^2=3^2-5\times1^2=4$

(2)　すべての自然数 n について，a_n，b_nは自然数でa_n+b_nは偶数であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$のとき

$a_1=3$，$b_1=1$より，a_1，b_1は自然数で，$a_1+b_1=4$は偶数である。

(ii)　$n=k$のとき

a_k，b_kは自然数でa_k+b_kは偶数であると仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(3a_k+5b_k)=(a_k+2b_k)+\frac{1}{2}(a_k+b_k)$$

$$b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+3b_k)=b_k+\frac{1}{2}(a_k+b_k)$$

$$a_{k+1}+b_{k+1}=\frac{1}{2}(3a_k+5b_k)+\frac{1}{2}(a_k+3b_k)=2(a_k+2b_k)$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1}は自然数で$a_{k+1}+b_{k+1}$は偶数である。

(i)(ii)より，a_n，b_nは自然数でa_n+b_nは偶数である。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。意外な感じですが，(1)と(2)の間に直接的な関係はありません。

5

問題のページへ

(1)　$AP=PD$ より，$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-a\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a\\a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}$ となり，

$1-2a=x$ ………①，$-a-2=-ay$ ………②

$-2+a=ax$ ………③，$2a+1=y$ ………④

①③より，$-2+a=a(1-2a)$ となり，$a^2=1$ である。

$a>0$ から $a=1$ となり，①より $x=-1$

④より，$y=3$ となり，この値は②を満たす。

(2)　$AP=PD$，$(tE)P=P(tE)$ より，$(A+tE)P=P(D+tE)$ ………⑤

(1)より，$P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ から，$\det P=2$ となるので P^{-1} は存在し，⑤より，

$A+tE=P(D+tE)P^{-1}$

よって，$(A+tE)^n=P(D+tE)P^{-1}\cdot P(D+tE)P^{-1}\cdots\cdots P(D+tE)P^{-1}$

$$=P(D+tE)^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+t&0\\0&3+t\end{pmatrix}^n\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1+t)^n&0\\0&(3+t)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1+t)^n+(3+t)^n&(-1+t)^n-(3+t)^n\\(-1+t)^n-(3+t)^n&(-1+t)^n+(3+t)^n\end{pmatrix}$$

条件より，$(A+tE)^n=4E$ なので，

$(-1+t)^n+(3+t)^n=8$ ………⑥，$(-1+t)^n-(3+t)^n=0$ ………⑦

⑥⑦より，$(-1+t)^n=(3+t)^n=4$ ………⑧

すると，$-1+t<3+t$ から，⑧を満たす実数 t と自然数 n が存在するためには，$-1+t=-(3+t)$ かつ n が偶数であることが必要である。

よって，$t=-1$ となり，⑧から $n=2$ である。

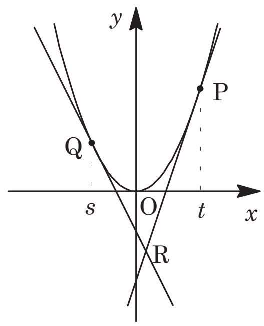
［解 説］

(1)は，対角行列を用いた n 乗計算という(2)への誘導です。ただ，この結果をどのように利用するかについて，ひとひねりがあります。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$C: y=x^2$ に対し，$y'=2x$ より，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，



$$y-t^2=2t(x-t),\ \ y=2tx-t^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における接線の方程式は，

$$y=2sx-s^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2tx-t^2=2sx-s^2$，$2(t-s)x=t^2-s^2$

$s<t$ より $x=\dfrac{t+s}{2}$ となり，①から $y=2t\cdot\dfrac{t+s}{2}-t^2=ts$

①②の交点は $R(X,\ Y)$ より，$X=\dfrac{t+s}{2}$，$Y=ts\ \cdots\cdots\cdots③$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\dfrac{t-s}{2}(1,\ 2t)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\dfrac{t-s}{2}(-1,\ -2s)$ となり，条件より，この 2 つのベクトルのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ なので，

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|},\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-1-4ts}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+4s^2}}$$

$-1-4st>0\ (4st<-1)$ のもとで，両辺を 2 乗すると，

$$2(-1-4ts)^2=(1+4t^2)(1+4s^2),\ \ 16t^2s^2-4(t^2+s^2)+16ts+1=0$$

変形して，$16t^2s^2-4(t+s)^2+24ts+1=0$

③を代入すると，$16Y^2-16X^2+24Y+1=0$

$$16\left(Y+\frac{3}{4}\right)^2-16X^2=8,\ \ 2X^2-2\left(Y+\frac{3}{4}\right)^2=-1$$

よって，$R(X,\ Y)$ は双曲線上を動き，その方程式は $2x^2-2\left(y+\dfrac{3}{4}\right)^2=-1$ である。

[解 説]

2 接線のなす角の扱いについては，内積を利用しています。tan の加法定理を用いても可能です。なお，題意が双曲線の方程式を求めるだけということなので，(2)の記述はアバウトです。s, t の実数条件や $4st<-1$ を加味すると，R の軌跡は双曲線の下側の枝となります。