

1

解答解説のページへ

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a > 0$ とする。

- (1) $f(-1) \leq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。
- (3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

3つの曲線

$$C_1: y = \sin x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right), \quad C_2: y = \cos x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right), \quad C_3: y = \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。
- (2) C_1 , C_2 , C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とし、1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して、不等式 $\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k)$ を示せ。
- (2) 不等式 $\int_1^n \log x dx \leq \log n!$ を示し、不等式 $n^n e^{1-n} \leq n!$ を導け。
- (3) $x \geq 0$ に対して、不等式 $x^n e^{1-x} \leq n!$ を示せ。

4

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面上に、2 点 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) をとり、以下の条件を満たす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

また、 $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とおく。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} の成分を求めよ。
- (2) $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき、 θ と S_1 の値を求めよ。
- (3) $S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と、そのときの S の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする。2点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき、 P は A により Q に移るといふ。

(1) 原点以外の点で、 A によりそれ自身に移るものが存在するとき、 a を求めよ。

(2) 次の条件(*)を満たす a, k を求めよ。

(*) 直線 $l: y = kx + 1$ 上のすべての点は、 A により l 上の点に移る。

(3) (*)を満たす a, k に対し、直線 l 上の点で、 A によりそれ自身に移るものを求めよ。

6

解答解説のページへ

直線 $l: mx + ny = 1$ が、楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) に接しながら動くとする。

- (1) 点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ。
- (2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と l との距離を d_1 とし、もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と l との距離を d_2 とする。このとき $d_1 d_2 = b^2$ を示せ。

1

問題のページへ

$$(1) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \text{ より, } f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a, f(3) = 9 - \frac{9}{2}a$$

$$f(-1) \leq f(3) \text{ から, } -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \leq 9 - \frac{9}{2}a \text{ となり, } a \leq \frac{7}{3}$$

$$a > 0 \text{ と合わせて, } 0 < a \leq \frac{7}{3}$$

$$(2) f'(x) = x^2 - ax = x(x-a)$$

$f(x)$ の増減は右表のようになり、条件より、極小値 $f(a) = -\frac{1}{6}a^3$ が $f(-1)$ 以下であることから、

x	...	0	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗

$$-\frac{1}{6}a^3 \leq -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a, a^3 - 3a - 2 \geq 0, (a+1)^2(a-2) \geq 0$$

$$a > 0 \text{ より, } a \geq 2$$

$$(3) (i) 0 < a < 3 \text{ のとき}$$

$-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり、(2)の結果から、最小値は、

x	-1	...	0	...	a	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗	

$$(i-i) 0 < a < 2 \text{ のとき } f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a$$

$$(i-ii) 2 \leq a < 3 \text{ のとき } f(a) = -\frac{1}{6}a^3$$

$$(ii) a \geq 3 \text{ のとき}$$

$-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり、(1)の結果から、最小値は、

x	-1	...	0	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$		↗	0	↘	

$$f(3) = 9 - \frac{9}{2}a$$

[解説]

(1)と(2)の誘導によって、(3)は計算が不要となっています。

2

問題のページへ

(1) $C_1: y = \sin x \cdots \cdots \textcircled{1}$, $C_2: y = \cos x \cdots \cdots \textcircled{2}$, $C_3: y = \tan x \cdots \cdots \textcircled{3}$ に対し,まず, C_1 と C_2 の交点は, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から, $\sin x = \cos x$ より, $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ より, } x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

また, C_2 と C_3 の交点は, $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から, $\cos x = \tan x$ より,

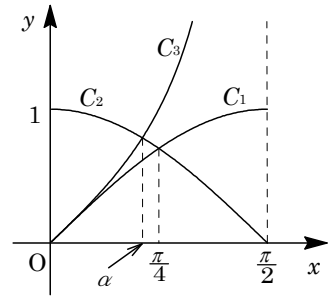
$$\cos^2 x = \sin x, \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ における解を $x = \alpha$ とおくと, $\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$y = \cos \alpha = \sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

さらに, C_3 と C_1 の交点は, $\textcircled{3}\textcircled{1}$ から, $\tan x = \sin x$ より, $\sin x(\cos x - 1) = 0$
 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より, $x = 0, y = 0$
(2) C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \tan x \, dx + \int_\alpha^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \\ &= [-\log|\cos x|]_0^\alpha + [\sin x]_\alpha^{\frac{\pi}{4}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\log(\cos \alpha) + \log 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= -\log \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



【解説】

基本的な求積問題です。まったく同じ問題を解いたという記憶はあるものの、出典は思い浮かびません。

3

問題のページへ

- (1)
- $f(x)$
- は単調増加する連続関数なので、
- $k-1 \leq x \leq k$
- において、
- $f(x) \leq f(k)$

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k) dx = f(k) \int_{k-1}^k dx = f(k)$$

- (2)
- $x > 0$
- で
- $f(x) = \log x$
- とおくと、
- $f(x)$
- は単調増加する連続関数なので、(1)から、

$$\int_{k-1}^k \log x dx \leq \log k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $n \geq 2$ のとき、①の両辺を、 $k=2$ から $k=n$ まで和をとると、

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \log x dx \leq \sum_{k=2}^n \log k$$

$$\int_1^n \log x dx \leq \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log(2 \times 3 \times \cdots \times n) = \log n! \cdots \cdots \textcircled{2}$$

なお、②は $n=1$ のときも成立している。

さて、②の左辺は、

$$\int_1^n \log x dx = [x \log x - x]_1^n = n \log n - n + 1 = \log n^n + \log e^{1-n} = \log n^n e^{1-n}$$

これより、②は、 $n^n e^{1-n} \leq n!$ となる。

- (3)
- $x \geq 0$
- において、
- $g(x) = x^n e^{1-x} - n!$
- とおくと、

$$g'(x) = nx^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1} e^{1-x} (n-x)$$

 $g(x)$ の増減は右表のようになり、(2)より、

$$g(n) = n^n e^{1-n} - n! \leq 0$$

よって、 $x \geq 0$ において、 $g(x) \leq 0$ すなわち $x^n e^{1-x} \leq n!$ である。

x	0	⋯	n	⋯
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$		↗		↘

[解説]

至れり尽くせりというぐらい、誘導が非常に細かくついている微分法の不等式への応用問題です。

4

問題のページへ

- (1) $\vec{OA} = (1, 0)$, $\vec{OB} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) に
対し, $\vec{OC} = (p, q)$, $\vec{OD} = (r, s)$ とおく。

まず, $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1$, $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$ より,

$$p = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad p \cos \theta + q \sin \theta = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } q = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ となり, } \vec{OC} = \left(1, -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$$

また, $\vec{OA} \cdot \vec{OD} = 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 1$ より,

$$r = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad r \cos \theta + s \sin \theta = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より, } s = \frac{1}{\sin \theta} \text{ となり, } \vec{OD} = \left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

- (2) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 は,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad S_2 = \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{1}{\sin \theta} + 0 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right| = \frac{1}{2 \sin \theta}$$

$$S_2 = 2S_1 \text{ より, } \frac{1}{2 \sin \theta} = \sin \theta, \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より, } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ から, } \theta = 135^\circ$$

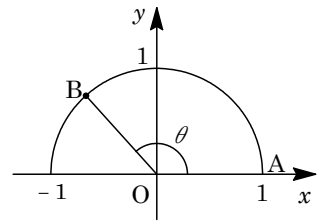
$$\text{このとき, } S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ となる。}$$

- (3) (2) より, $S = 4S_1 + 3S_2 = 2 \sin \theta + \frac{3}{2 \sin \theta}$ となり, $\sin \theta > 0$ から,

$$2 \sin \theta + \frac{3}{2 \sin \theta} \geq 2 \sqrt{2 \sin \theta \cdot \frac{3}{2 \sin \theta}} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{等号は, } 2 \sin \theta = \frac{3}{2 \sin \theta} \text{ すなわち } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ } (\theta = 120^\circ) \text{ のとき成立する。}$$

よって, $\theta = 120^\circ$ のとき, S は最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。



[解説]

ベクトルの成分計算についての基本問題です。

5

問題のページへ

(1) E を単位行列とすると、条件より、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (A-E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots (*)$$

 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、 $A-E = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & a+1 \end{pmatrix}$ は逆行列が存在しないので、

$$\det(A-E) = a(a+1) - 3a = 0, \quad a^2 - 2a = 0$$

よって、 $a=0, 2$ である。(2) 直線 $l: y = kx + 1$ 上の任意の点を $(t, kt + 1)$ とおく。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ kt+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1+ak)t+a \\ (3+ak+2k)t+a+2 \end{pmatrix}$$

条件より、 $Y = kX + 1$ なので、

$$(3+ak+2k)t+a+2 = k\{(a+1+ak)t+a\} + 1$$

任意の t に対して成立することより、

$$3+ak+2k = k(a+1+ak) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a+2 = ak+1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

\textcircled{1} より、 $ak^2 - k - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ \textcircled{2} より、 $a(k-1) = 1, a = \frac{1}{k-1} \quad (k \neq 1) \cdots \cdots \textcircled{4}$ \textcircled{3}\textcircled{4} より、 $\frac{k^2}{k-1} - k - 3 = 0, k^2 - (k^2 + 2k - 3) = 0, k = \frac{3}{2}$ すると、\textcircled{4} より、 $a = 2$ (3) (2) より、 $l: y = \frac{3}{2}x + 1$ となり、 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ である。直線 l 上の点を $(p, \frac{3}{2}p + 1)$ とおくと、(*) から、

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \frac{3}{2}p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、 $p + (\frac{3}{2}p + 1) = 0$ から $p = -\frac{2}{5}$ となり、 l 上の不動点は、 $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ である。

[解説]

不動点と不変直線に関する基本事項の確認です。(3)は、不動点の集合である直線 $x + y = 0$ と $l: y = \frac{3}{2}x + 1$ との交点として求めることもできます。

6

問題のページへ

- (1) 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の接点を $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とおくと、接線の方程式は、

$$\frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} y = 1, \quad \frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①が直線 $l: mx + ny = 1$ に一致することより、

$$m = \frac{\cos \theta}{a}, \quad n = \frac{\sin \theta}{b}$$

これより、 $a^2 m^2 + b^2 n^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$ となり、点 (m, n) の軌跡は楕円になる。

- (2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と $l: mx + ny - 1 = 0$ との距離を、それぞれ d_1, d_2 とすると、

$$d_1 = \frac{|-m\sqrt{a^2 - b^2} - 1|}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad d_2 = \frac{|m\sqrt{a^2 - b^2} - 1|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$\text{すると、} d_1 d_2 = \frac{|-m^2(a^2 - b^2) + 1|}{m^2 + n^2} = \frac{|-a^2 m^2 + b^2 m^2 + 1|}{m^2 + n^2}$$

$$\textcircled{2} \text{を代入すると、} d_1 d_2 = \frac{|b^2 n^2 + b^2 m^2|}{m^2 + n^2} = \frac{b^2(n^2 + m^2)}{m^2 + n^2} = b^2$$

[解説]

(1)では、接線の公式を利用しました。重解条件の利用によっても②を導けますが、計算量はかなり増加します。